



DS8 - CCB Mardi 28 avril 2026

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

NB : les questions marquées d'une * sont les questions modifiées ou ajoutées par rapport au sujet initial

**Problème 1 - Série
(d'après Banque PT 2023)**

Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2, x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3 . Comprendre : ni en x_1 , ni en x_2 , ni en x_3 .

Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x , par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}.$$

1. En calculant, de deux façons différentes :

$$\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) g(x)$$

établir que :

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement).

2. On suppose désormais que, pour tout réel x :

$$P(x) = 1$$

avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3 .

Partie I

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition \mathcal{D}_F , associe :

$$F(x) = \ln \left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \right).$$

3. Déterminer \mathcal{D}_F . Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.
4. Justifier que F est dérivable sur \mathcal{D}_F . On désigne par f sa dérivée.

5. Montrer que, pour tout réel x de \mathcal{D}_F :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}.$$

On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ de paramètre $x \in \mathbb{R}$.

6. (*) Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)$.

7. (*) Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge.

8. (*) En déduire que pour tout $x \in [-1; 0[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge.

9. (*) Montrer que pour tout réel x ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge} \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

10. (*)

(a) Donner le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le n -ième coefficient de ce développement limité.

(b) Vérifier que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge.

$$\text{On admet alors que pour tout } x \in]-1; 1[, \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

11. (a) Donner le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}$ en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

(b) Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.

12. (*)

(a) Déduire de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le n -ième coefficient de ce développement limité.

(b) Vérifier que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ converge.

$$\text{On admet alors que pour tout } x \in]-1; 1[, \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

13. Montrer que, pour tout réel x de $]-1; 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2).$$

14. Pour tout réel x de $]-1; 1[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Indication : on pensera à utiliser les résultats du Préambule.

15. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right).$$

16. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n).$$

17. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$

**Problème 2 - Equations différentielles et
intégration
(d'après Banque PT 2024)**

Partie I

On considère l'équation différentielle sur $]0; \pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (\mathcal{E})$$

1. On introduit les fonctions f et f_0 qui, à tout réel x de $]0; \pi[$, associe :

$$f_0(x) = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right), \quad \text{et} \quad f(x) = \sin(x) \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

(a) Montrer que pour tout réel x de $]0; \pi[$,

$$f_0'(x) = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)}$$

et en déduire une expression simplifiée de f_0' .

(b) Montrer que, pour tout réel x de $]0; \pi[$:

$$f''(x) = -f(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

2. Résoudre l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) .

3. Montrer que les solutions y de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) .

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x) \sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0; \pi[$.

- Montrer que si y est solution de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$, alors z' est solution sur $]0; \pi[$ d'une équation différentielle de premier ordre, notée (\mathcal{E}') .
- Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (\mathcal{E}') , puis appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de (\mathcal{E}') . Donner alors, pour tout réel x de $]0; \pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x .
- Calculer la dérivée de $\frac{\cos}{\sin}$ sur $]0; \pi[$.
 - En déduire pour tout réel x de $]0; \pi[$, une expression $z(x)$ en fonction de x .
- Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$ obtenues plus haut.

Partie II

On introduit les fonctions G et H , définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subseteq \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_G : G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta$$
$$\forall x \in \mathcal{D}_H : H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- Expliciter, en le justifiant avec soin, \mathcal{D}_G .
- (*) Soit $g : u \mapsto e^{-u^2}$. Montrer que g est 1-lipschitzienne.
 - En déduire la continuité de la fonction G .
- Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

On admet que G est dérivable sur \mathcal{D}_G et que

$$\forall x \in \mathcal{D}_G, G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta.$$

- Expliciter \mathcal{D}_H .
 - Montrer que la fonction H est de classe C^1 sur \mathcal{D}_H . On explicitera la dérivée de H .
- A l'aide du changement de variable $u = x \tan(\theta)$, montrer que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,

$$G'(x) = -2e^{-x^2} H(x).$$

(On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$).

- Montrer que la fonction $H^2 + G$ est constante, en précisant la valeur de cette constante.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x^2} dx$, ainsi qu'une expression simplifiée de $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt^2} dt$, pour tout réel $x > 0$.

Fin de l'épreuve