Commentaires du DS8-CCB
Analyse

Index des raccourcis :

- TB : très bien
- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- Pq ? : pourquoi ?
- D ? : Dérivabilité ?
- VND : Variable non définie

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{45}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1	P2.1	P2.2	P2	Total	Total Brut	Note finale
Moyenne	-2,2	2,2	7	9,2	5,9	0,6	6,5	13,5	3	7,36
Sur		5	40	45	20	25	45	90	20	20

TOTAL : 90 pt

Plusieurs d'entre vous ne sont pas attentifs aux consignes, j'ai vu des entêtes peu remplis ou pas entièrement et des pages non numérotées ou le total manquait. Si vous ne prenez pas les consignes aux sérieux, je ne m'étonne plus des difficultés qu'ont certains d'entre vous à progresser. Je signale qu'une copie avec un entête mal remplie est susceptible au concours de ne pas être corrigée...

Problème I - Série (d'après Banque PT 2023) 45 pt

Préambule 5 pt

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2, x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3. Comprendre : ni en x_1, ni en x_2, ni en x_3.
Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x, par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}.$$

1. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ En calculant, de deux façons différentes :

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)\, g(x)$$

établir que :

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Il y avait une façon élémentaire de calculer la limite qui n'a pas toujours été faite. La seconde façon n'était pas très difficile mais a été peu réussie. Plusieurs bonnes réponses malgré tout. J'ai vu deux calculs efficaces de Q' par la dérivée. Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement).

Bien généralement mais souvent trop peu justifié. Dire « de même » ne suffit pas puisque l'on demande explicitement une justification (même si elle doit être brève).

2. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On suppose désormais que, pour tout réel x :

$$P(x) = 1$$

avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3.

Bien réussie globalement y compris parfois même lorsque la question précédente ne l'a pas été. Quelques erreurs de calcul.

Partie I $\boxed{\textbf{40 pt}}$

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right).$$

3. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer $\mathcal{D}_F$. Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.

Un massacre ! Plusieurs bonnes réponses mais cette question de terminale semble parfois insurmontable pour plusieurs d'entre vous. Certains répondent à la question sans faire le tableau de signe... La rédaction démarre plutôt bien avec $F(x)$ existe $\Leftrightarrow$ mais après vous vous empêtrez dans des considérations lourdes et bizarres alors que le tableau permet de bien faire le travail. Pour calculer un signe, ne jamais développer !!!

4. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.

Une ou deux bonnes réponses, le reste d'entre vous parachute un « comme composée de fonctions qui le sont ». Insuffisant puisque c'est le coeur de la question ici.

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}.$$

Bien globalement. Parfois long et laborieux pour certains et quelques erreurs pour d'autres.

On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ de paramètre $x \in \mathbb{R}$.

6. (*) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)$.

Question basique du chapitre sur les séries, très peu réussie au global. Le cours n'est ni appris ni maîtrisé. Certains pensent que $f(n)$ tendant vers 0 cela suffit pour la convergence. D'autres donnent un équivalent à $\frac{1}{n^3}$ au lieu de $\frac{1}{2n^3}$. Plusieurs oublient la positivité pour appliquer le théorème sur les équivalents ou le théorème de comparaison. Une petite poignée de bonnes réponses. Plusieurs ont bien vu la coquille de prendre $n \in \mathbb{N}^*$ et non $\mathbb{N}$.

7. (*) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge.

Très peu de bonnes réponses. Plusieurs parlent de convergence par produit (je n'ai jamais ça, vous si ?) d'autres de géométrique et d'autres bricolent des argumentation en français parfaitement vaseux. A revoir.

8. (*) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que pour tout $x \in [-1;0[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge.

Quelques-uns mais assez peu ont vu la convergence absolue. Malheureusement, le raisonnement est souvent très mal exprimé (et donc par très juste). N'oubliez pas de traiter le cas -1 à part.

9. (*) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout réel x,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge } \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1;1]\,.$$

Beaucoup ont simplement justifié l'implication réciproque (et parfois mal). Une ou deux copies ont pensé à la réciproque, ce qui était le coeur de la question.

10. (*)

   (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Donner le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.
   Un massacre, l'absence d'apprentissage solide du cours vous pénalise sérieusement. Des fautes de signe à la pelle, des o qui disparaissent ou des ordres qui ne sont pas p.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le n-ième coefficient de ce développement limité.

   (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Vérifier que pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge.
   Pratiquement aucune bonne réponse vu que la question précédente déjà a été peu réussie.
   On admet alors que pour tout $x \in]-1;1[$, $\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

11. (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Donner le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}$ en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.
   Un peu mieux mais le DL est très souvent donné à l'ordre $2p$ au lieu de p. Beaucoup d'erreurs encore globalement.

   (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.
   Question facile, assez bien réussie mais pas toujours traitée.

12. (*)

   (a) $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Déduire de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
   Quatre ou cinq copies pensent bien à la primitivation du DL. Il manque parfois la constante et parfois le raisonnement n'est pas complet.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le n-ième coefficient de ce développement limité.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Vérifier que pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ converge.

Très peu de réponses.

On admet alors que pour tout $x \in]-1;1[$, $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

13. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que, pour tout réel x de $]-1;1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x\ln\left(1-x^2\right).$$

Non réussie.

14. $\boxed{\textbf{5 pt}}$ Pour tout réel x de $]-1;1[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n\,(n+1)\,(2n+1)}.$$

<u>Indication</u> : on pensera à utiliser les résultats du Préambule.

Non traitée.

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer

$$\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n\,(n+1)\,(2n+1)}\right).$$

Quelques tentatives mais non réussie. En général, $\lim\sum \neq \sum\lim$.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H\,(2n+1) - \frac{1}{2}H(n).$$

Quelques tentatives, aucun succès.

17. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H\,(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$

Non réussie.

Problème II - Equa diff et intégration (d'après Banque PT 2024) $\boxed{\textbf{45 pt}}$

Partie I $\boxed{\textbf{20 pt}}$

On considère l'équation différentielle sur $]0;\pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (\mathcal{E})$$

1. On introduit les fonctions f et f_0 qui, à tout réel x de $]0;\pi[$, associe :

$$f_0(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right), \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

   (a) $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que pour tout réel x de $]0;\pi[$,

$$f_0'(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   Très peu de bonnes justification de la dérivabilité de f_0. Une majorité de bonnes réponses mais aussi quelques échecs. et en déduire une expression simplifiée de f_0'.

   Bien globalement. Ceux qui n'y parviennent pas sont handicapés pour la suite.

   (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que, pour tout réel x de $]0;\pi[$:

$$f''(x) = -f(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

   N'oubliez pas de justifier de la dérivabilité deuxième de f. Globalement correct pour ceux qui ont réussi la question précédente.

2. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

   Un massacre encore. Très peu de bonnes réponses. Cela montre que le cours encore une fois n'a pas été appris de façon intelligente car ici il n'y a que de la récitation. Plusieurs essayent de résoudre l'équation comme si elle était d'ordre 1. D'autres donnent des réponses absurdes de fonctions toujours constantes ou donne un ensemble solution de dimension 1 seulement...

3. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Montrer que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f$$

   où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

   De la récitation de cours, bien peu souvent faite, alors que l'on pouvait avoir un point facile même sans avoir fait les autres questions. Une poignée de bonnes réponses.

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x)\sin(x)$$

   où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0;\pi[$.

   (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$, alors z' est solution sur $]0;\pi[$ d'une équation différentielle de premier ordre, notée $(\mathcal{E}')$.

   N'oubliez pas de justifier que y est deux fois dérivable. Plusieurs bonnes réponses même si vous ne parvenez pas toujours à bien conclure. N'oubliez pas de mettre du $\forall x \in$ à chaque équivalence!!!

   (b) $\boxed{\textbf{4 pt}}$ Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$, puis appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$. Donner alors, pour tout réel x de $]0;\pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x.

   Quelques bonnes réponses mais pas une majorité.

(c) i. $\boxed{2\text{ pt}}$ Calculer la dérivée de $\frac{\cos}{\sin}$ sur $]0;\pi[$.
Facile plutôt réussie sauf que la dérivabilité manque toujours...

ii. $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire pour tout réel x de $]0;\pi[$, une expression $z(x)$ en fonction de x.
Un ou deux bonnes réponses seulement.

(d) $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ obtenues plus haut.
Idem.

Partie II $\boxed{25\text{ pt}}$

On introduit les fonctions G et H, définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subset \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_G : \quad G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\forall x \in \mathcal{D}_H : \quad H(x) = \int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5. $\boxed{2\text{ pt}}$ Expliciter, en le justifiant avec soin, $\mathcal{D}_G$.
Très peu réussie, des confusions entre x et θ. Il est malheureux de voir que la plupart d'entre vous ne pensent même pas à parler de continuité.

6. (a) $\boxed{3\text{ pt}}$ (*) Soit $g : u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$. Montrer que g est 1-lipschitzienne.
Non réussie. Quelques tentatives pertinentes mais beaucoup ne savent même pas trop ce qu'il faut faire alors que nous avons traité une dizaine de fois une telle question...

(b) $\boxed{4\text{ pt}}$ En déduire la continuité de la fonction G.
Non réussie car largement sous-estimée, cette question est difficile.

7. $\boxed{4\text{ pt}}$ Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$
Idem. En général, $\lim \int \neq \int \lim$.

On admet que G est dérivable sur $\mathcal{D}_G$ et que

$$\forall x \in \mathcal{D}_G, \quad G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

8. (a) $\boxed{1{,}5\text{ pt}}$ Expliciter $\mathcal{D}_H$.
Il suffisait d'appliquer le théorème fondamental de l'analyse mais très très peu l'ont vu et personne ne l'a rédigé correctement.

(b) $\boxed{1{,}5\text{ pt}}$ Montrer que la fonction H est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H$. On explicitera la dérivée de H.
Idem.

9. $\boxed{3\text{ pt}}$ A l'aide du changement de variable $u = x\tan(\theta)$, montrer que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,
$$G'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,H(x).$$
(On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$).
Non réussie.

10. $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que la fonction $H^2 + G$ est constante, en précisant la valeur de cette constante.
Une seule bonne réponse.

11. **4 pt** En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x^2}\,dx$, ainsi qu'une expression simplifiée de $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-xt^2}\,dt$, pour tout réel $x>0$.

Non traitée.