

Corrigé du DS 8 - Concours Blanc

Epreuve C - Analyse

Problème I - Série (d'après Banque PT 2023)

Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2, x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3 . Comprendre : ni en x_1 , ni en x_2 , ni en x_3 .

Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x , par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}.$$

1. Montrons que $a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$ et procédons de même pour a_2 et a_3 .

On a, d'une part, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$,

$$(x - x_1)g(x) = a_1 + (x - x_1)\frac{a_2}{x - x_2} + (x - x_1)\frac{a_3}{x - x_3}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x \neq x_1}} (x - x_1)g(x) = a_1.$$

D'autre part,

$$(x - x_1)g(x) = (x - x_1)\frac{P(x)}{Q(x)} = (x - x_1)\frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} = \frac{P(x)}{(x - x_2)(x - x_3)}.$$

Ainsi, par continuité de P (en tant que fonction polynomiale), on a

$$\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1)g(x) = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

Or la fonction Q est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2).$$

Donc

$$Q'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3).$$

Puisque x_1 est distinct de x_2 et x_3 , on a $Q'(x_1) \neq 0$ et

$$\frac{P(x_1)}{Q'(x_1)} = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

Donc par ce qui précède,

$$\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) g(x) = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

Conclusion,

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow x_2} (x - x_2) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} (x - x_2) \frac{a_1}{x - x_1} + a_2 + (x - x_2) \frac{a_3}{x - x_3} = a_2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_2} (x - x_2) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_3)} = \frac{P(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}.$$

Conclusion,

$$a_2 = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}.$$

Enfin, de la même façon, on obtient

$$a_3 = \frac{P(x_3)}{Q'(x_3)}.$$

2. On suppose désormais que, pour tout réel x :

$$P(x) = 1$$

avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Déterminons les valeurs explicites de a_1 , a_2 et a_3 .

Par la question précédente,

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{1}{1 \times 1/2} = 2.$$

De même,

$$a_2 = \frac{1}{(-1)(-1/2)} = 2 \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{1}{(-1/2)(1/2)} = -4.$$

Conclusion,

$$a_1 = a_2 = 2, \quad a_3 = -4$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -1/2, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+\frac{1}{2})} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+\frac{1}{2}}.$$

Partie I

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition \mathcal{D}_F , associe :

$$F(x) = \ln \left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \right).$$

3. Déterminons \mathcal{D}_F .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x \in \mathcal{D}_F \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right) \text{ existe} \Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \text{ existe et est strictement positif.}$$

Or, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0		$+$
$x+1$		$-$	0		$+$		$+$		$+$
$(2x+1)^2$		$+$		$+$	0		$+$		$+$
$\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$		$+$	0		$-$		0		$+$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_F =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.}$$

 4. Justifions que F est dérivable sur \mathcal{D}_F .

Les fonctions $x \mapsto x(x+1)$ et $x \mapsto (2x+1)^2$ sont dérivables sur \mathbb{R} en tant que fonctions polynomiales. La fonction $x \mapsto (2x+1)^2$ ne s'annule qu'en $-\frac{1}{2}$. Donc la fonction $h : x \mapsto \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et par la question précédente, $\forall x \in \mathcal{D}_F =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$, $h(x) > 0$. Donc par composée,

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_F.}$$

On désigne par f sa dérivée.

 5. Calculons f .

Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right)'}{\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}} \\ &= \frac{(2x+1)(2x+1)^2 - x(x+1)2 \times 2 \times (2x+1)}{(2x+1)^4} \times \frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \\ &= \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{2x+1} \times \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{1}{2x+1} \times \frac{1}{x(x+1)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_F, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}}.$$

On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ de paramètre $x \in \mathbb{R}$.

6. Déterminons la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{2n^3} > 0$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. Conclusion, par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n) \text{ converge.}}$$

7. Montrons que pour tout $x \in]0; 1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge. Soit $x \in]0; 1[$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)x^{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq f(n)x^{2n+1} \leq f(n).$$

Or par la question précédente, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\forall x \in]0; 1[, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge.}}$$

8. Déduisons-en que pour tout $x \in [-1; 0[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge. Soit $x \in [-1; 0[$. Alors,

$$\left| f(n)x^{2n+1} \right| = f(n) |x|^{2n+1} \quad \text{car } f(n) > 0.$$

Puisque $|x| \in]0; 1[$, par les deux questions précédentes (permettant d'inclure $|x| = 1$), $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n) |x|^{2n+1}$ converge. Autrement dit, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [-1; 0[, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge.}}$$

9. Montrons que pour tout réel x ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge} \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

On sait par ce qui précède que pour tout $x \in [-1; 1]$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge. Donc

$$x \in [-1; 1] \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge.}$$

Montrons la réciproque par la contraposée. Autrement dit que si $x \notin [-1; 1]$ alors $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ diverge. Soit $x > 1$, alors par croissance comparée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)x^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = +\infty.$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ diverge grossièrement. De même, si $x < -1$, puisque $2n + 1$ est impair, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)x^{2n+1} = -\infty,$$

et donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ diverge aussi grossièrement. Donc pour tout $x \notin [-1; 1]$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ diverge. Conclusion,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge} \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

10. (a) Le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ est donné par

$$\ln(1 - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^p}{p} + o(x^p).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le n -ième coefficient de ce développement limité : $a_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = -\frac{1}{n}$.

(b) Vérifions que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n x^n$ converge.

Soit $x \in]-1; 1[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq |a_n x^n| = \frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n.$$

Or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x|^n$ converge en tant que série géométrique dont la raison $|x|$ vérifie $|x| \in]-1; 1[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n x^n| \text{ converge.}$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge absolument. Conclusion,

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \text{ converge.}$$

On admet alors que pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$\ln(1 - x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

11. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1 - u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n).$$

Posons $u = x^2$. Alors $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc

$$\frac{1}{1 - x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Conclusion,

$$\frac{1}{1 - x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{cases} 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^p + o(x^p) & \text{si } p \text{ est pair} \\ 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{p-1} + o(x^p) & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

- (b) Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.

Méthode 1. On intuite et donne directement le résultat.

Méthode 2. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

On observe que

$$a = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} (1-x) \frac{1}{1-x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} (1+x) \frac{1}{1-x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$

12. (a) Déterminons le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.
Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} (1+x+x^2+\dots+x^p+o(x^p)) + \frac{1}{2} (1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^p x^n+o(x^n)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{cases} 1+x^2+x^4+\dots+x^n+o(x^n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1+x^2+x^4+\dots+x^{n-1}+o(x^n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in]-1; 1[$, par la question précédente, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$. Donc une primitive F de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est donnée par

$$F : x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(|1-x|) + \frac{1}{2} \ln(|1+x|) = -\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Par le théorème de primitivation du développement limité, on a

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \begin{cases} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) & \text{si } n+1 \text{ est pair} \\ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}) & \text{si } n+1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{cases} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{p-1}}{p-1} + o(x^p) & \text{si } p \text{ est pair} \\ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^p}{p} + o(x^p) & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le n -ième coefficient de ce développement limité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

(b) Vérifions que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ converge.

Soit $x \in]-1; 1[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |b_n x^n| \leq |x|^n.$$

Comme précédemment, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ converge en tant que série géométrique de raison $|x| \in]-1; 1[$.

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n x^n|$ converge donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ converge absolument. Conclusion,

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n \text{ converge.}$$

On admet alors que pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

13. Montrons pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2)$.

Soit $x \in]-1; 1[$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n}.$$

Puisque $x \in]-1; 1[$, on a $x^2 \in]0; 1[\subset]-1; 1[$. Donc par la question 10.b la série converge bien et on en conclut que

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2).$$

14. Soit $x \in]-1; 1[$, exprimons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$.

Par la question 2. pour tout $n \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, -1/2, 0\}$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+1/2)} = \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{4}{n+1/2}.$$

ou encore,

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

Donc pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{x^{2n+1}}{n} + \frac{x^{2n+1}}{n+1} - \frac{4x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{n} + \frac{1}{x^2} \frac{x^{2(n+1)+1}}{n+1} - 4 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On a alors

- par la question précédente, pour tout $x \in]-1; 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2).$$

- Par la question précédente, pour tout $x \in]-1; 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2(n+1)+1}}{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2(n+1)+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} - x^3 = -x \ln(1-x^2) - x^3.$$

- par la question 12.b la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x.$$

Par somme, pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} &= -x \ln(1-x^2) - \frac{x \ln(1-x^2) + x^3}{x^2} - 4 \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \right) \\ &= -\frac{x^2+1}{x} \ln((1-x)(1+x)) - x - 2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 4x \\ &= 3x + \left(2 - \frac{x^2+1}{x}\right) \ln(1-x) - \left(\frac{x^2+1}{x} + 2\right) \ln(1+x) \\ &= 3x - \frac{x^2-2x+1}{x} \ln(1-x) - \frac{x^2+2x+1}{x} \ln(1+x). \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in]-1; 1[$, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \begin{cases} 3x - \frac{(x-1)^2}{x} \ln(1-x) - \frac{(x+1)^2}{x} \ln(1+x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

15. Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right)$. Par croissance comparée, on sait que (en posant $h = 1-x$),

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x-1)^2 \ln(1-x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} h^2 \ln(h) = 0.$$

Donc par produit et somme et la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right) = 3 - 4 \ln(2).}$$

16. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n)$. On observe que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ impair}}} \frac{1}{p} \\ &= \sum_{1 \leq p \leq 2n+1} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{1 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ pair}}} \frac{1}{p} \\ &= H(2n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= H(2n+1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n).$$

17. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}$.

Par la question 2., $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}.$$

On reconnaît $H(n)$ dans la première somme, on effectue le glissement d'indice $\tilde{k} = k+1$ dans la deuxième et on utilise le résultat de la question précédente pour la troisième somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= H(n) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4 \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - 1 \right) \\ &= H(n) + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 - 4 \left(H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n) - 1 \right) \\ &= H(n) + \frac{1}{n+1} + H(n) - 1 - 4H(2n+1) + 2H(n) + 4. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$

Problème II - Equations différentielles et intégration

(d'après Banque PT 2024)

Partie I

On considère l'équation différentielle sur $]0; \pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (\mathcal{E})$$

1. On introduit les fonctions f et f_0 qui, à tout réel x de $]0; \pi[$, associe :

$$f_0(x) = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right), \quad \text{et} \quad f(x) = \sin(x) \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

(a) Montrons que pour tout réel x de $]0; \pi[$,

$$f_0'(x) = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)}$$

et déduisons-en une expression simplifiée de f_0' . Pour tout $x \in]0; \pi[$, on a,

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= \frac{\frac{1}{2} \tan' \left(\frac{x}{2} \right)}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} \right)}} \\ &= \frac{1}{2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Or $2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right) = \sin(x)$. Conclusion,

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad f_0'(x) = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

(b) Montrer que, pour tout réel x de $]0; \pi[$:

$$f''(x) = -f(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

La fonction sinus est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et donc sur $]0; \pi[$ et la fonction f_0 est deux fois dérivable sur $]0; \pi[$ donc par produit, $f = \sin f_0$ est deux fois dérivable sur $]0; \pi[$, de plus, par la question 1.a pour tout $x \in]0; \pi[$,

$$f'(x) = \cos(x) f_0(x) + \sin(x) \times \frac{1}{\sin(x)} = \cos(x) f_0(x) + 1.$$

Puis,

$$f''(x) = -\sin(x) f_0(x) + \cos(x) \frac{1}{\sin(x)} = -f(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad f''(x) = -f(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

2. Résolvons l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) donnée par

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad y''(x) + y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est donnée par $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1$ dont les solutions sont i et $-i$. Dès lors, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donnée par

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_0} = \left\{ \begin{array}{l}]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Montrons que les solutions y de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à (\mathcal{E}) .

Par la question 1.b, la fonction f est une solution de l'équation (\mathcal{E}) donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) est donné par

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{ f + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}_0} \}.$$

Ainsi, par la question précédente,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{l}]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + A \cos(x) + B \sin(x) \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x) \sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0; \pi[$.

(a) Montrons que si y est solution de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$, alors z' est solution sur $]0; \pi[$ d'une équation différentielle de premier ordre, notée (\mathcal{E}') . Supposons y solution de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$:

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Puisque z est deux fois dérivable sur $]0; \pi[$, on a $y'' = z'' \sin + 2z' \cos - z \sin$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; \pi[, \quad z''(x) \sin(x) + 2z'(x) \cos(x) - z(x) \sin(x) + z(x) \sin(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow \forall x \in]0; \pi[, \quad z''(x) + 2z'(x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} &= \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \quad \text{car } \sin(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, $Z = z'$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad Z'(x) + 2Z(x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \quad (\mathcal{E}').$$

(b) Déterminons les solutions de l'équation homogène associée à (\mathcal{E}') , puis appliquons la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de (\mathcal{E}') . Nous donnerons alors, pour tout réel x de $]0; \pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x .

L'équation homogène associée à (\mathcal{E}') est donnée par

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad Z'(x) + 2Z(x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0 \quad (\mathcal{E}'_0).$$

La fonction $x \mapsto 2 \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est continue sur $]0; \pi[$ donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par $x \mapsto 2 \ln(|\sin(x)|) = \ln(\sin^2(x))$. Dès lors, l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}'_0) est donné par

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}'_0} = \left\{ \begin{array}{l}]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A e^{-\ln(\sin^2(x))} \end{array} \middle| A \in \mathbb{R} \right\},$$

ou encore

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}'_0} = \left\{ \begin{array}{l}]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{A}{\sin^2(x)} \end{array} \middle| A \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soient Z une fonction dérivable sur $]0; \pi[$, $Z_0 = \frac{1}{\sin^2}$ et $\lambda = \frac{Z}{Z_0}$ car Z_0 ne s'annule pas sur $]0; \pi[$. La fonction λ est dérivable sur $]0; \pi[$ en tant que quotient et l'on a

Z solution de (\mathcal{E}')

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; \pi[, \quad Z'(x) + 2Z(x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; \pi[, \quad \lambda'(x)Z_0(x) + \underbrace{\lambda(x)Z'_0(x) + 2\lambda(x)Z_0(x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}_{=0 \text{ car } Z_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}'_0}} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; \pi[, \quad \lambda'(x) = \frac{\cos(x)}{Z_0(x) \sin^2(x)} = \cos(x) \text{ car } Z_0(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in]0; \pi[, \quad \lambda(x) = \sin(x) + A$$

$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in]0; \pi[, \quad Z(x) = \frac{\sin(x) + A}{\sin^2(x)}.$$

Conclusion,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}'} = \left\{ \begin{array}{l}]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{A}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)} \end{array} \middle| A \in \mathbb{R} \right\}.$$

En particulier, il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad z'(x) = \frac{A}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)}.$$

- (c) i. La fonction $\frac{\cos}{\sin}$ est dérivable sur $]0; \pi[$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle ($\forall x \in]0; \pi[, \sin(x) > 0$). De plus,

$$\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = \frac{-1}{\sin^2}.$$

Conclusion, sur $]0; \pi[$,

$$\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{-1}{\sin^2}.$$

- ii. Exprimons, pour tout réel x de $]0; \pi[$, $z(x)$ en fonction de x . Par la question précédente, la fonction $\frac{\cos}{\sin}$ est une primitive de $-\frac{1}{\sin^2}$ sur $]0; \pi[$ et par la question 1.a $f_0 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est une primitive de $\frac{1}{\sin}$ sur \mathcal{D}_{f_2} donc sur $]0; \pi[$. Donc par la question précédente, (quitte à poser $\tilde{A} = -A$),

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0; \pi[, \quad z(x) = A \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + f_0(x) + B.$$

- (d) Montrons que l'on retrouve bien l'expression des solutions de (\mathcal{E}) sur $]0; \pi[$ obtenues plus haut. Puisque $y = z \sin$, par la question précédente, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad y(x) = A \cos(x) + \sin(x)f_0(x) + B \sin(x) = f(x) + A \cos(x) + B \sin(x).$$

Ce raisonnement d'analyse permet de retrouver le fait que si y est une solution de (\mathcal{E}) alors y s'écrit bien sous cette forme. Une synthèse permet de montrer que ces fonctions sont aussi toutes solutions. Conclusion, on retrouve bien l'ensemble des solutions précédemment établi :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{l}]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + A \cos(x) + B \sin(x) \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Partie II

On introduit les fonctions G et H , définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subset \mathbb{R}$, par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_G : \quad G(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta \\ \forall x \in \mathcal{D}_H : \quad H(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

5. Explicitons, en le justifiant avec soin, \mathcal{D}_G . Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $\theta \mapsto e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}$ est **continu** sur le **segment** $[0; \frac{\pi}{4}]$ comme quotient et composée de fonctions qui le sont car la fonction \cos ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc $G(x)$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en conclut que

$$\mathcal{D}_G = \mathbb{R}.$$

6. (a) * Soit $g : u \mapsto e^{-u^2}$. Montrons que g est 1-lipschitzienne. La fonction g est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g'(u) = -2u e^{-u^2}.$$

La fonction g est deux fois dérivable et l'on a de plus,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g''(u) = -2e^{-u^2} + 4u^2 e^{-u^2} = 2e^{-u^2} (2u^2 - 1).$$

Dès lors, $g''(u) \geq 0 \Leftrightarrow 2u^2 \geq 1 \Leftrightarrow u \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ OU $u \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction g' est donc croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$ et décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]$. De plus,

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} g'(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} g'(u) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

enfin $g'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}e^{-1/2}$ et $g'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{-1/2}$. Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
g'	0	$\sqrt{2}e^{-1/2}$	$-\sqrt{2}e^{-1/2}$	0

En particulier,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |g'(u)| \leq \sqrt{2}e^{-1/2} = \sqrt{2e^{-1}} = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Or $2 < e$ donc $\frac{2}{e} < 1$ donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |g'(u)| \leq 1.$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$. La fonction g est continue sur $[x; y]$ (ou $[y; x]$) et dérivable sur $]x; y[$ (ou $]y; x[$). Donc par le théorème des accroissements finis, il existe $u \in]x; y[$ (ou $]y; x[$) tel que

$$g(x) - g(y) = g'(u) (x - y).$$

Donc

$$|g(x) - g(y)| \leq |g'(u)| |x - y| \leq |x - y|,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

la fonction g est 1-lipschitzienne.

(b) Déduisons-en la continuité de la fonction G . Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} G(x) - G(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{y^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} g\left(\frac{x}{\cos(\theta)}\right) - g\left(\frac{y}{\cos(\theta)}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire (car les bornes sont dans le bon sens) et la question précédente, on obtient,

$$\begin{aligned} |G(x) - G(y)| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| g\left(\frac{x}{\cos(\theta)}\right) - g\left(\frac{y}{\cos(\theta)}\right) \right| d\theta \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{x}{\cos(\theta)} - \frac{y}{\cos(\theta)} \right| d\theta. \end{aligned}$$

Or pour tout $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]$, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(\theta) \leq 1$ ou encore $1 \leq \frac{1}{\cos(\theta)} \leq \sqrt{2}$. Ainsi,

$$|G(x) - G(y)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} |x - y| d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} |x - y|.$$

Or quand y tend vers x , $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} |x - y| \rightarrow 0$. Donc par le théorème d'encadrement, Par suite,

$$\lim_{y \rightarrow x} |G(x) - G(y)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y \rightarrow x} G(y) = G(x).$$

Donc G est continue en x et ceci étant vrai pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on en conclut que

G est continue sur \mathbb{R} .

7. Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

Soit $x > 0$. On a vu que pour tout $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $1 \leq \frac{1}{\cos(\theta)} \leq \sqrt{2}$. Donc

$$1 \leq \frac{1}{\cos^2(\theta)} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \geq -\frac{1}{\cos^2(\theta)} \geq -2.$$

Comme $x^2 > 0$,

$$-x^2 \geq -\frac{x^2}{\cos^2(\theta)} \geq -2x^2.$$

Par croissance de la fonction exponentielle,

$$e^{-x^2} \geq e^{\frac{-x^2}{\cos^2(\theta)}} \geq e^{-2x^2}.$$

Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2} d\theta \geq G(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2x^2} d\theta$$

ou encore

$$\frac{\pi}{4} e^{-x^2} \geq G(x) \geq \frac{\pi}{4} e^{-2x^2}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x^2} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.}$$

On admet que G est dérivable sur \mathcal{D}_G et que

$$\forall x \in \mathcal{D}_G, \quad G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta.$$

8. (a) Explicitons \mathcal{D}_H . Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est **continue** sur \mathbb{R} , elle l'est notamment sur le **segment** $[0; x]$ (ou $[x; 0]$). Donc $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en conclut que H est définie sur \mathbb{R} :

$$\boxed{\mathcal{D}_H = \mathbb{R}.}$$

- (b) Montrons que la fonction H est de classe C^1 sur \mathcal{D}_H . On explicitera la dérivée de H . Puisque la fonction $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction H est l'unique primitive de h sur \mathbb{R} s'annulant en 0. Donc H est dérivable et $H' = h$ est continue sur \mathbb{R} . Conclusion,

$$\boxed{H \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, H'(x) = e^{-x^2}.}$$

9. A l'aide du changement de variable $u = x \tan(\theta)$, montrons que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,

$$G'(x) = -2e^{-x^2} H(x).$$

Soit $x \neq 0$. Posons pour tout $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $u = x \tan(\theta)$ i.e. $\theta = \arctan(\frac{u}{x})$ car $x \neq 0$. Quand $\theta = 0$, $u = 0$ et quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, $u = x$. De plus, la fonction $u \mapsto \arctan(\frac{u}{x})$ est \mathcal{C}^1 sur $[0; x]$ (ou $[x; 0]$) et $d\theta = \frac{1/x}{1+(\frac{u}{x})^2} du$. D'autre part, on observe que

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta) = 1 + \left(\frac{u}{x}\right)^2.$$

Donc par le théorème de changement de variable et la dérivée de G admise,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int_0^x -\frac{2}{x} (x^2 + u^2) e^{-(x^2+u^2)} \frac{x}{x^2 + u^2} du \\ &= \int_0^x -2 e^{-x^2} e^{-u^2} du \\ &= -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, on a

$$G'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0 \, d\theta = 0 \quad \text{et} \quad -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \, du = 0.$$

La formule reste donc vraie si $x = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_G = \mathbb{R}, \quad G'(x) = -2e^{-x^2} H(x).}$$

10. Montrons que la fonction $H^2 + G$ est constante et précisons la valeur de cette constante. On a vu que G et H sont dérivables sur \mathbb{R} donc la fonction $H^2 + G$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (H^2 + G)'(x) &= 2H'(x)H(x) + G'(x) \\ &= 2e^{-x^2} H(x) - 2e^{-x^2} H(x) \quad \text{par la question 8.b et la précédente} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(H^2 + G)(x) = C$. En particulier,

$$C = (H^2 + G)(0) = \left(\int_0^0 e^{-t^2} \, dt \right)^2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-0} \, d\theta = 0 + \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (H^2 + G)(x) = \frac{\pi}{4}.}$$

11. Déduisons-en la valeur de l'intégrale de Gauss $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x^2} \, dx$, ainsi qu'une expression simplifiée

de $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt^2} \, dt$, pour tout réel $x > 0$. Par la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4} - G(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^x e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - G(x)}.$$

Ou encore

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \int_0^A e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{4} - G(A)}.$$

Or par la question 7. $\lim_{A \rightarrow +\infty} G(A) = 0$. Donc par continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ en $\frac{\pi}{4}$, on en conclut que

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x^2} \, dx$ existe et

$$\boxed{\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Soient $x > 0$ et $A > 0$. Posons pour tout $t \in [0; A]$, $s = \sqrt{xt}$ i.e. $t = \frac{s}{\sqrt{x}}$ car $x \neq 0$. Si $t = 0$, $s = 0$ et si $t = A$, $s = \sqrt{x}A$. De plus, la fonction $s \mapsto \frac{s}{\sqrt{x}}$ est \mathcal{C}^1 sur $[0; \sqrt{x}A]$ et $dt = \frac{1}{\sqrt{x}} ds$. Par le théorème de changement de variable,

$$\int_0^A e^{-xt^2} \, dt = \int_0^{\sqrt{x}A} e^{-s^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \, ds = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}A} e^{-s^2} \, ds.$$

Puisque $\sqrt{x} \neq 0$, $\sqrt{x}A \rightarrow +\infty$ quand $A \rightarrow +\infty$. Donc par ce qui précède,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt^2} \, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

Fin du corrigé