



DS9 - CCB Jeudi 30 avril 2026

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

NB : les questions marquées d'une * sont les questions modifiées ou ajoutées par rapport au sujet initial

Problème 1 - Algèbre linéaire (d'après Banque PT 2022)

Première Partie

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. On note P^T la transposée de P .

1. (*) Calculer PP^T .
2. (*) Justifier que P est inversible et préciser son inverse.
3. Calculer $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire A^n en fonction de n pour tout entier naturel n .
6. Soient A' , D' et P' trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D' est diagonale, P' vérifie $P'(P')^T = I_n$ et $A' = P'D'P'^{-1}$.

La matrice A' est-elle symétrique ?

Deuxième Partie

Dans cette partie, on confond une matrice à une ligne et une colonne avec son unique coefficient. Pour toute matrice M on note M^T sa transposée.

On note E l'espace vectoriel des vecteurs colonnes à trois lignes : $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Les matrices A et D sont celles qui ont été définies dans la première partie.

Pour tous vecteurs $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ de E , on note $f(U) = AU$ et $\varphi(U, V) = U^TAV$. On pose également $U' = P^TU = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. (a) (*) Soit U un vecteur de E . Démontrer que $\varphi_1 : V \mapsto \varphi(U, V)$ est linéaire.
 (b) (*) Soit V un vecteur de E . Démontrer que $\varphi_2 : U \mapsto \varphi(U, V)$ est linéaire.
 (c) (*) Démontrer que pour tous vecteurs U et V de E , $\varphi(V, U) = \varphi(U, V)$.
On pourra passer à la transposer sur V^TAU .
 (d) Soit U un vecteur de E . Exprimer $\varphi(U, U)$ en fonction de D et U' puis de x' , y' et z' .
 (e) En déduire que pour tout vecteur U de E , $\varphi(U, U) = 0$ implique $U = 0_E$.
3. Soient λ et μ deux réels distincts et U et V deux vecteurs de E tels que $f(U) = \lambda U$ et $f(V) = \mu V$. Montrer que $\varphi(U, V) = 0$.

Soit U un vecteur de E . On note

$$F_U = \{V \in E \mid U^T V = 0\} \quad F'_U = \{V \in E \mid \varphi(U, V) = 0\}.$$

On note $\mathcal{C} = (I, J, K)$ la base canonique de E .

4. Soit U un vecteur de E tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(U) = \lambda U$. Montrer que $F_U = F'_U$.
5. (a) Donner une base de F_I où I est le premier vecteur de la base canonique.
(b) Déterminer une base de F'_I .
(c) A-t-on $F_I = F'_I$? Déterminer une base de $F_I \cap F'_I$.
6. (a) Soient U et V deux vecteurs de E . Démontrer que si $V \in F'_U$ alors $f(V) \in F_U$.
(b) Démontrer que pour tous vecteurs V et W de E , $f(V)^T W = V^T f(W)$.
7. Soit U un vecteur non nul de E tel que $F_U = F'_U$.
(a) (*) Démontrer à l'aide de la question 6. que $f(F_U) \subseteq F_U$.
(b) (*) Soit \mathcal{B}_U une base de F_U . Montrer que $f(\mathcal{B}_U)$ est une base de $f(F_U)$.
(c) Démontrer que $f(F_U) = F_U$.
(d) (*) En déduire que pour tout vecteur V de F_U , $f(U)^T V = 0$.

Problème 2 - Probabilités

On considère (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème seront définies. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On possède deux urnes : l'urne A et l'urne B ainsi que $2n$ boules : n rouges et n vertes. On remplit les deux urnes de la façon suivante. On lance une pièce équilibrée à n reprises et on suppose les lancers indépendants. On note N le nombre de piles obtenus. On remplit alors l'urne A de N vertes et de $n - N$ rouges. Toutes les n boules restantes vont dans l'urne B .

Une fois les urnes remplies, on procède de la façon suivante. A chaque étape, on pioche une boule dans chaque urne et on les échange. Ainsi chaque urne possède toujours à chaque étape n boules. On pose $X_0 = N$ et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules vertes présentes dans l'urne A à l'issue du/juste après le tirage k .

Partie 1 : Lois initiales

On note Y la variable aléatoire valant 1 si l'on a pioché une boule verte au premier tirage dans l'urne A et 0 sinon. Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

1. Quelle est la loi de N ? Préciser $\mathbb{P}(N = 1)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(X_k = p)$ est réalisé. Préciser alors la composition de l'urne A et de l'urne B à l'étape k .
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte dans l'urne A au tirage 1 sachant que $N = p$?
4. Justifier que $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{p}{n}$.
5. En déduire que $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Pouvait-on intuitiver ce résultat?
6. On suppose dans cette question uniquement que n est pair. Préciser suivant la valeur de p si les événements $(Y = 1)$ et $(N = p)$ sont indépendants ou non.

7. Calculer la probabilité d'avoir $N = n$ sachant que l'on a obtenu une boule verte dans l'urne A au tirage 1.

Partie 2 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$, $b_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $c_k = \mathbb{P}(X_k = 2)$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_k + b_k + c_k$?
9. Préciser a_0 , b_0 , c_0 .
10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, préciser en justifiant $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$.
11. Dédire de la question précédente que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+1} = \frac{b_k}{4} \\ b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k \\ c_{k+1} = \frac{b_k}{4} \end{cases} .$$

12. *Méthode 1.*

- (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}$.
- (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k , b_k et c_k .

13. *Méthode 2.*

- (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+1} = 1 - \frac{b_k}{2}$.
- (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k , b_k et c_k .

14. En déduire les limites des suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Partie 3 : Un petit pois dans un champ de betteraves

On reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note U_k l'évènement : « l'urne A n'a eu qu'une seule boule verte du début jusqu'à l'étape k (inclusive) ».

15. Ecrire U_k à l'aide de $X_0, X_1, X_2, \dots, X_k$.
16. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On suppose U_i réalisé. On effectue le tirage $i + 1$ dans chaque urne.
- (a) Quelle est α la probabilité d'obtenir une verte dans l'urne A et une boule verte dans l'urne B ?
- (b) Quelle est β la probabilité d'obtenir une rouge dans l'urne A et une boule rouge dans l'urne B ?
- (c) En déduire $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid U_i)$.
17. Conclure en calculant $\mathbb{P}(U_k)$.

Fin de l'épreuve