Commentaires du DS9-CCB
Analyse

Index des raccourcis :

- TB : très bien
- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- Pq ? : pourquoi ?
- D ? : Dérivabilité ?
- VND : Variable non définie

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{50}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2	Total	Total Brut	Note finale
Moyenne	-1	4,5	5,6	10,1	2,7	2,7	1	6,4	15,4	3,4	7,46
Sur		12	38	50	20	20	10	50	100	20	20

TOTAL : 100 pt

Problème I - Algèbre linéaire (d'après Banque PT 2022) 50 pt

Première Partie 12 pt

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. On note P^T la transposée de P.

1. **2 pt** (*) Calculer PP^T.

   Facile et bien réussie. Plusieurs ne savaient pas la définition de P^T et d'autres se sont trompés dans le calcul.

2. **2 pt** (*) Justifier que P est inversible et préciser son inverse.

   Direct par la question précédente. Une moitié l'a bien vu. Quelques autres ont fait un long pivot pour parvenir au résultat (et parfois avec erreur).

3. **2 pt** Calculer $D = P^{-1}AP$.

   Facile mais il fallait avoir la bonne matrice P^{-1}. Là encore des erreurs de calcul sanctionnent lourdement quelques-uns.

4. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Une majorité de bonnes réponses. Quelques-uns ne savent même pas démarrer et d'autres ont de graves problèmes de rédaction. Il faut définir la propriété $\mathscr{P}(n)$ et il est nécessaire de commencer une hérédité par « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   Question plus calculatoire où il faut avoir trouvé correctement P^{-1} et D. Pas beaucoup mais quelques bonnes réponses.

6. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soient A', D' et P' trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D' est diagonale, P' vérifie $P'(P')^T = I_n$ et $A' = P'D'P'^{-1}$.

   La matrice A' est-elle symétrique ?

   Question pas très difficile lorsque l'on sait que $(AB)^T = B^TA^T$ et qu'une matrice diagonale est forcément symétrique. Très peu de bonnes réponses.

Deuxième Partie $\boxed{38 \text{ pt}}$

Dans cette partie, on confond une matrice à une ligne et une colonne avec son unique coefficient.
Pour toute matrice M on note M^T sa transposée.
On note E l'espace vectoriel des vecteurs colonnes à trois lignes : $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Les matrices A et D sont celles qui ont été définies dans la première partie.
Pour tous vecteurs $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ de E, on note $f(U) = AU$ et $\varphi(U,V) = U^TAV$. On pose également $U' = P^TU = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$.

1. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que f est un endomorphisme de E.

   Bien pour ceux qui l'ont traité. N'oubliez pas de justifier que f va de E dans E d'après le produit matriciel utilisé et les dimensions des matrices.

2. (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ (*) Soit U un vecteur de E. Démontrer que $\varphi_1 : V \mapsto \varphi(U,V)$ est linéaire.
   Bien. Deux trois étudiants ne savent toujours pas faire proprement une telle question.

   (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ (*) Soit V un vecteur de E. Démontrer que $\varphi_2 : U \mapsto \varphi(U,V)$ est linéaire.
   Idem.

   (c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ (*) Démontrer que pour tous vecteurs U et V de E, $\varphi(V,U) = \varphi(U,V)$.

   On pourra passer à la transposée sur V^TAU.

   Une seule très belle réponse. Quelques autres arrivent à bien calculer la transposée de V^TAU mais sans montrer que V^TAU est un réel et donc forcément égal à sa transposée.

   (d) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit U un vecteur de E. Exprimer $\varphi(U,U)$ en fonction de D et U' puis de x', y' et z'.
   Trois quatre bonnes réponses seulement.

   (e) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que pour tout vecteur U de E, $\varphi(U,U) = 0$ implique $U = 0_E$.
   Idem.

3. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soient λ et μ deux réels distincts et U et V deux vecteurs de E tels que $f(U) = \lambda U$ et $f(V) = \mu V$. Montrer que $\varphi(U,V) = 0$.

   Une ou deux bonnes réponses.

Soit U un vecteur de E. On note

$$F_U = \left\{ V \in E \;\middle|\; U^T V = 0 \right\} \qquad F'_U = \{ V \in E \mid \varphi(U, V) = 0 \}.$$

On note $\mathscr{C} = (I, J, K)$ la base canonique de E.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit U un vecteur de E tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(U) = \lambda U$. Montrer que $F_U = F'_U$.
   Beaucoup de forçages. Une petite poignée de bonnes réponses.

5. (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Donner une base de F_I où I est le premier vecteur de la base canonique.
   Question très abordable mais finalement assez peu traitée, dommage, à reprendre calmement.
   (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer une base de F'_I.
   Idem.
   (c) $\boxed{3 \text{ pt}}$ A-t-on $F_I = F'_I$? Déterminer une base de $F_I \cap F'_I$.
   Non réussie. Question pas si dure pourtant.

6. (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soient U et V deux vecteurs de E. Démontrer que si $V \in F'_U$ alors $f(V) \in F_U$.
   Plus de bonnes réponses ici.
   (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Démontrer que pour tous vecteurs V et W de E, $f(V)^T W = V^T f(W)$.
   Idem.

7. Soit U un vecteur non nul de E tel que $F_U = F'_U$.
   (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ (*) Démontrer à l'aide de la question 6. que $f(F_U) \subset F_U$.
   Quelques bonnes réponses également. Non traitée sinon.
   (b) $\boxed{4 \text{ pt}}$ (*) Soit $\mathscr{B}_U$ une base de F_U. Montrer que $f(\mathscr{B}_U)$ est une base de $f(F_U)$.
   Question dure. Non réussie.
   (c) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Démontrer que $f(F_U) = F_U$.
   Non réussie mais plus facile lorsque l'on arrive à faire le lien avec la dimension.
   (d) $\boxed{3 \text{ pt}}$ (*) En déduire que pour tout vecteur V de F_U, $f(U)^T V = 0$.
   Non traitée.

Problème II - Probabilités $\boxed{50 \text{ pt}}$

On considère $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème seront définies. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On possède deux urnes : l'urne A et l'urne B ainsi que $2n$ boules : n rouges et n vertes. On remplit les deux urnes de la façon suivante. On lance une pièce équilibrée à n reprises et on suppose les lancers indépendants. On note N le nombre de piles obtenus. On remplit alors l'urne A de N vertes et de $n - N$ rouges. Toutes les n boules restantes vont dans l'urne B.

Une fois les urnes remplies, on procède de la façon suivante. A chaque étape, on pioche une boule dans chaque urne et on les échange. Ainsi chaque urne possède toujours à chaque étape n boules. On pose $X_0 = N$ et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules vertes présentes dans l'urne A à l'issue du/juste après le tirage k.

Partie 1 : Lois initiales $\boxed{20 \text{ pt}}$

On note Y la variable aléatoire valant 1 si l'on a pioché une boule verte au premier tirage dans l'urne A et 0 sinon. Soit $p \in [\![0; n]\!]$.

1. $\boxed{4 \text{ pt}}$ Quelle est la loi de N ? Préciser $\mathbb{P}(N = 1)$.
   Question facile, simple, basique... très peu réussie. La probabilité demandée est simplement l'application du cours.

2. **2 pt** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(X_k = p)$ est réalisé. Préciser alors la composition de l'urne A et de l'urne B à l'étape k.

   Question facile aussi, plutôt réussie mais étonnamment pas par tout le monde.

3. **2 pt** Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte dans l'urne A au tirage 1 sachant que $N = p$?

   J'ai vu de ces choses... j'en fais encore des cauchemars. Je rappelle qu'une probabilité est nécessairement un nombre plus petit que 1.

4. **3 pt** Justifier que $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{p}{n}$.

   Non réussie. Dommage la question est classique et sans difficulté.

5. **4 pt** En déduire que $Y \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Pouvait-on intuiter ce résultat ?

   Question plus dure. Non réussie. Deux ou trois pistes pour l'interprétation.

6. **3 pt** On suppose dans cette question uniquement que n est pair. Préciser suivant la valeur de p si les évènements $(Y = 1)$ et $(N = p)$ sont indépendants ou non.

   Non réussie. Quelques débuts de réponses.

7. **2 pt** Calculer la probabilité d'avoir $N = n$ sachant que l'on a obtenu une boule verte dans l'urne A au tirage 1.

   Quelques bonnes réponses mais assez peu.

Partie 2 : Le cas $n = 2$ **20 pt**

On suppose dans cette partie que $n = 2$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$, $b_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $c_k = \mathbb{P}(X_k = 2)$.

8. **2 pt** Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_k + b_k + c_k$?

   Etonnamment peu de réponses. Question fondamentale.

9. **2 pt** Préciser a_0, b_0, c_0.

   Encore moins de bonnes réponses pourtant la question est plutôt facile.

10. **3 pt** Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $(i, j) \in [\![0; 2]\!]$, préciser en justifiant $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$.

    Question un peu plus longue car comprenait beaucoup de cas différents. Une belle réponse (seulement).

11. **2 pt** Déduire de la question précédente que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+1} = \frac{b_k}{4} \\ b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k \\ c_{k+1} = \frac{b_k}{4} \end{cases}.$$

    Une seule réponse correcte.

12. *Méthode 1.*

    (a) **2 pt** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}$.
    Plus facile (mais non probabiliste comme question). Bien réussie.

    (b) **3 pt** En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k et c_k.
    Moins réussie, quelques-uns seulement reconnaissent bien et traitent correctement la suite récurrente linéaire d'ordre 2.

13. *Méthode 2.*

   (a) **2 pt** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+1} = 1 - \frac{b_k}{2}$.
   Un peu plus subtile mais quelques bonnes réponses.

   (b) **2 pt** En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k et c_k.
   Idem, peu réussie alors qu'il s'agit juste d'une suite arithmético-géométrique.

14. **2 pt** En déduire les limites des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   Une petite poignée de bonnes réponses.

Partie 3 : Un petit pois dans un champ de betteraves **10 pt**

On reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note U_k l'évènement : « l'urne A n'a eu qu'une seule boule verte du début jusqu'à l'étape k (incluse) ».

15. **2 pt** Ecrire U_k à l'aide de X_0, X_1, X_2, $\ldots$, X_k.
   Bien globalement.

16. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On suppose U_i réalisé. On effectue le tirage $i+1$ dans chaque urne.

   (a) **2 pt** Quelle est α la probabilité d'obtenir une verte dans l'urne A et une boule verte dans l'urne B ?
   Une seule bonne réponse.

   (b) **2 pt** Quelle est β la probabilité d'obtenir une rouge dans l'urne A et une boule rouge dans l'urne B ?
   Idem.

   (c) **2 pt** En déduire $\mathbb{P}\left(X_{i+1} = 1 \mid U_i\right)$.
   Idem.

17. **2 pt** Conclure en calculant $\mathbb{P}(U_k)$.
   Non réussie.