

Corrigé du Devoir Surveillé 9 - Concours Blanc
Epreuve A - Algèbre et Probabilités

Problème I - Algèbre linéaire (d'après Banque PT 2022)

Première Partie

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. On note P^T la transposée de P .

1. Calculons PP^T . On a directement

$$\begin{aligned} PP^T &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} & \frac{4}{6} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= I_3. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$PP^T = I_3.$$

2. Justifions que P est inversible et précisons son inverse. Par la question précédente, $PP^T = I_3$. Donc on en déduit que

$$P \text{ est inversible et } P^{-1} = P^T.$$

3. Calculons $D = P^{-1}AP$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} D &= P^T AP \\ &= P^T \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{2} & 4/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 4/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{2} & 4/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Puisque la question contient un « démontrer », faisons la récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors $A^0 = I_3$ par convention et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = APD^nP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} && \text{par la question précédente} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}.}$$

5. Par récurrence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= PD^nP^T && \text{car } P \text{ est orthogonale} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^T \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2^n/\sqrt{2} & 4^n/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 4^n/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2^n/\sqrt{2} & 4^n/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{1}{6} - 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{1}{6} - 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{1}{6} + 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} \end{pmatrix}.$$

6. Soient A' , D' et P' trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D' est diagonale, P' vérifie $P'(P')^T = I_n$ et $A' = P'D'P'^{-1}$.

Montrons que A' est symétrique. Puisque D' est diagonale, elle est notamment symétrique donc $(D')^T = D'$. Par suite,

$$(A')^T = (P'D'P'^{-1})^T = (P'^{-1})^T (D')^T (P')^T = (P'^{-1})^T D' (P')^T.$$

Or $P'(P')^T = I_n$. Donc $(P')^{-1} = (P')^T$:

$$(A')^T = (P'^T)^T D' P'^{-1} = P' D' P'^{-1} = A'.$$

Conclusion,

$$\boxed{A' \text{ est symétrique.}}$$

Deuxième Partie

Dans cette partie, on confond une matrice à une ligne et une colonne avec son unique coefficient.

Pour toute matrice M on note M^T sa transposée.

On note E l'espace vectoriel des vecteurs colonnes à trois lignes : $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Les matrices A et D sont celles qui ont été définies dans la première partie.

Pour tous vecteurs $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ de E , on note $f(U) = AU$ et $\varphi(U, V) = U^T AV$. On pose également $U' = P^T U = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$.

1. Montrons que f est un endomorphisme de E . Si $U \in E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puisque $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, par produit, $AU \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E$. Donc f est bien définie sur E et à valeurs dans E . De plus, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(U, V) \in E^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda U + \mu V) &= A(\lambda U + \mu V) \\ &= \lambda AU + \mu AV \quad \text{par linéarité du produit matriciel à droite} \\ &= \lambda f(U) + \mu f(V). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Conclusion,

f est un endomorphisme de E .

2. (a) Soit U un vecteur de E . Démontrons que $\varphi_1 : V \mapsto \varphi(U, V)$ est linéaire. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(V_1, V_2) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) &= \varphi(U, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) \\ &= U^T A(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) \\ &= \lambda_1 U^T AV_1 + \lambda_2 U^T AV_2 \quad \text{par linéarité du produit matriciel à droite} \\ &= \lambda_1 \varphi_1(V_1) + \lambda_2 \varphi_1(V_2). \end{aligned}$$

Conclusion,

φ_1 est linéaire.

- (b) Soit V un vecteur de E . Démontrons que $\varphi_2 : U \mapsto \varphi(U, V)$ est linéaire. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(U_1, U_2) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) &= \varphi(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, V) \\ &= (\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2)^T AV \\ &= (\lambda_1 U_1^T + \lambda_2 U_2^T) AV \quad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda_1 U_1^T AV + \lambda_2 U_2^T AV \quad \text{par linéarité du produit matriciel à gauche} \\ &= \lambda_1 \varphi_2(U_1) + \lambda_2 \varphi_2(U_2). \end{aligned}$$

Conclusion,

φ_2 est linéaire.

- (c) Démontrer que pour tous vecteurs U et V de E , $\varphi(V, U) = \varphi(U, V)$. Soit $(U, V) \in E^2$,

$$\varphi(V, U) = V^T AU.$$

Or, $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc $U^T \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a $U^T A \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et donc $V^T A U \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $V^T A U = (V^T A U)^T$. Ainsi,

$$\varphi(V, U) = (V^T A U)^T = U^T A^T (V^T)^T = U^T A V,$$

car A est symétrique. Conclusion,

$$\boxed{\forall (U, V) \in E^2, \quad \varphi(V, U) = \varphi(U, V).}$$

(d) Soit U un vecteur de E . Exprimons $\varphi(U, U)$ en fonction de D et U' puis de x' , y' et z' . On a

$$\varphi(U, U) = U^T A U = (P U')^T A P U' = (U')^T P^T A P U' = U'^T D U'.$$

Puis,

$$\varphi(U, U) = [x' \quad y' \quad z'] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = (x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(U, U) = U'^T D U' = (x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2.}$$

(e) Dédudons-en que pour tout vecteur U de E , $\varphi(U, U) = 0$ implique $U = 0_E$. Soit U un vecteur de E . Supposons que $\varphi(U, U) = 0_{\mathbb{R}}$. Alors, par la question précédente,

$$(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 = 0.$$

Puisque les termes sont positifs,

$$(x')^2 = 2(y')^2 = 4(z')^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = y' = z' = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $U' = 0_E$ et donc $U = P U' = 0_E$. Donc U est le vecteur nul. Conclusion,

$$\boxed{\forall U \in E, \quad \varphi(U, U) = 0 \Rightarrow U = 0_E.}$$

3. Soient λ et μ deux réels distincts et U et V deux vecteurs de E tels que $f(U) = \lambda U$ et $f(V) = \mu V$. Montrons que $\varphi(U, V) = 0$. Par hypothèse, $A U = \lambda U$ et $A V = \mu V$. Donc d'une part,

$$\varphi(U, V) = U^T A V = U^T (\mu V) = \mu U^T V.$$

D'autre part, comme A est symétrique,

$$\varphi(U, V) = U^T A V = (A U)^T V = (\lambda U)^T V = \lambda U^T V.$$

Donc

$$(\lambda - \mu) U^T V = 0_{\mathbb{R}}.$$

Or par hypothèse, $\lambda \neq \mu$ donc $U^T V = 0$ et donc $\varphi(U, V) = \mu U^T V = 0_{\mathbb{R}}$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi(U, V) = 0.}$$

Soit U un vecteur de E . On note

$$F_U = \left\{ V \in E \mid U^T V = 0 \right\} \quad F'_U = \{ V \in E \mid \varphi(U, V) = 0 \}.$$

On note $\mathcal{C} = (I, J, K)$ la base canonique de E .

4. Soit U un vecteur de E tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(U) = \lambda U$. Soit $V \in E$. Comme vu précédemment, on observe que

$$\varphi(U, V) = U^T A V = (AU)^T V = (\lambda U)^T V = \lambda U^T V.$$

Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} V \in F_U &\Leftrightarrow U^T V = 0 &\Leftrightarrow \lambda U^T V = 0 &\quad \text{CAR } \lambda \neq 0 \\ &&\Leftrightarrow \varphi(U, V) = 0 \\ &&\Leftrightarrow V \in F'_U. \end{aligned}$$

Par ces équivalences, on en déduit que

$$\boxed{F_u = F'_u.}$$

5. (a) Soit V un vecteur de E , $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. On a

$$I^T V = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x.$$

Par conséquent,

$$V \in F_I \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow V = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow V = yJ + zK.$$

Donc

$$F_I = \text{Vect}(J, K).$$

La famille (J, K) engendre donc F_I et est libre en tant que sous famille de la base canonique.
Conclusion,

$$\boxed{(J, K) \text{ est une base de } F_I.}$$

(b) Avec les notations de la question précédente,

$$\varphi(I, V) = [1 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{5x + 2y + z}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V \in F'_I &\Leftrightarrow 5x + 2y + z = 0 &\Leftrightarrow z = -5x - 2y \\ &&\Leftrightarrow V = xI + yJ - (5x + 2y)K \\ &&\quad = x(I - 5K) + y(J - 2K). \end{aligned}$$

Et donc,

$$F'_I = \text{Vect}(I - 5K, J - 2K).$$

La famille $(I - 5K, J - 2K)$ engendre F'_I et est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Conclusion,

$$\boxed{(I - 5K, J - 2K) \text{ est une base de } F'_I.}$$

(c) Par ce qui précède, avec les mêmes notations,

$$V \in F_I \cap F'_I \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2y \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(J - 2K) \text{ est une base de } F_I \cap F'_I.}$$

Notamment, $\dim(F_I \cap F'_I) = \text{Card}(J - 2K) = 1 \neq 2 = \text{Card}(J, K) = \dim(F_I)$. Donc $F_I \cap F'_I \neq F_I$ et nécessairement,

$$\boxed{F_I \neq F'_I.}$$

6. (a) Soient U et V deux vecteurs de E . Supposons $V \in F'_U$. Alors,

$$0 = \varphi(U, V) = U^T AV = U^T f(V).$$

Donc $f(V) \in F_U$. Conclusion,

$$\boxed{V \in F'_U \Rightarrow f(V) \in F_U.}$$

(b) Soient U et W deux vecteurs de E . Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} f(V)^T W &= (AV)^T W = V^T A^T W = V^T AW && \text{car } A \text{ est symétrique} \\ &= V^T f(W). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (V, W) \in E^2, \quad f(V)^T W = V^T f(W).}$$

7. Soit U un vecteur non nul de E tel que $F_U = F'_U$.

(a) Soit $V \in f(F_U)$. Alors il existe $W \in F_U$ tel que $V = f(W)$. On a $W \in F_U = F'_U$ donc par la question précédente, $f(W) \in F_U$. Donc $V = f(W) \in F_U$. Ceci étant vrai pour tout $V \in f(F_U)$, on en déduit que

$$\boxed{f(F_U) \subset F_U.}$$

(b) Soit \mathcal{B}_U une base de F_U (existe car F_U sous-espace de E de dimension finie). Montrons que f est injective. Soit $V \in E$. On a

$$V \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(V) = 0_E \Leftrightarrow AV = 0_E.$$

Or A est inversible. En effet, D est inversible (et son inverse est $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$) donc

par produit de matrices inversibles, A est inversible (et $A^{-1} = PD^{-1}P^T$). Donc $A^{-1}AV = 0_E$ et donc $V = 0_E$. La réciproque étant aussi vraie :

$$V \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow V = 0_E.$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc f est injective. Puisque f est injective et \mathcal{B}_U libre, $f(\mathcal{B}_U)$ est libre. De plus, puisque \mathcal{B}_U est génératrice de F_U , $f(\mathcal{B}_U)$ engendre $f(F_U)$. Conclusion,

$$\boxed{f(\mathcal{B}_U) \text{ est une base de } f(F_U).}$$

(c) Par la question précédente,

$$\dim(f(F_U)) = \text{Card}(f(\mathcal{B}_U)) = \text{Card}(\mathcal{B}_U) = \dim(F_U).$$

Ainsi, puisque $f(F_U) \subset F_U$ et que $\dim(f(F_U)) = \dim(F_U)$, on conclut que

$$\boxed{f(F_U) = F_U.}$$

(d) Montrons que pour tout vecteur V de F_U , $f(U)^T V = 0$. Soit $V \in F_U$. Par la question précédente, $f(V) \in f(F_U) = F_U$. Donc

$$U^T f(V) = 0.$$

Alors, par la question 6.b

$$0 = f(U)^T V.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall V \in F_U, \quad f(U)^T V = 0.}$$

Problème II - Probabilités

On considère (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème seront définies. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On possède deux urnes : l'urne A et l'urne B ainsi que $2n$ boules : n rouges et n vertes. On remplit les deux urnes de la façon suivante. On lance une pièce équilibrée à n reprises et on suppose les lancers indépendants. On note N le nombre de piles obtenus. On remplit alors l'urne A de N vertes et de $n - N$ rouges. Toutes les n boules restantes vont dans l'urne B .

Une fois les urnes remplies, on procède de la façon suivante. A chaque étape, on pioche une boule dans chaque urne et on les échange. Ainsi chaque urne possède toujours à chaque étape n boules. On pose $X_0 = N$ et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules vertes présentes dans l'urne A à l'issue du/juste après le tirage k .

Partie 1 : Lois initiales

On note Y la variable aléatoire valant 1 si l'on a pioché une boule verte au premier tirage dans l'urne A et 0 sinon. Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

1. On lance n fois une même pièce et les lancers sont indépendants. Donc N totalise le nombre de succès lors de la réalisation de n expériences identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/2$ (la pièce est équilibrée). Conclusion,

$$\boxed{N \text{ suit une loi binomiale de paramètre } n \text{ et } 1/2 : N \sim \mathcal{B}(n, 1/2).}$$

En particulier,

$$\boxed{\mathbb{P}(N = 1) = \binom{n}{1} \frac{1}{2^1} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^n}}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $(X_k = p)$ est réalisé cela signifie que l'urne A contient p boules vertes. Or au total, l'urne A contient toujours n boules. Nécessairement, il a donc $n - p$ boules rouges dans l'urne A . Puisque p boules vertes sont dans l'urne A , les $n - p$ boules vertes restantes sont dans l'urne B . De même puisque $n - p$ boules rouges sont dans A , l'urne B contient les p boules rouges restantes. Conclusion, si $(X_k = p)$, à l'étape k ,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{l'urne } A \text{ contient } p \text{ boules vertes, } n - p \text{ boules rouges} \\ \text{l'urne } B, n - p \text{ boules vertes et } p \text{ boules rouges.} \end{array}}$$

3. On cherche $\mathbb{P}(Y = 1 \mid N = p)$. Si $N = p$ est réalisé, cela signifie que l'urne A est composée de p boules vertes et de $n - p$ boules rouges. On tire une boule de façon uniforme parmi ces n boules, on obtient

$$\mathbb{P}(Y = 1 \mid N = p) = \frac{p}{n}.$$

4. On sait que $(N = p)_{p \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{p=0}^n \mathbb{P}(Y = 1 \mid N = p) \mathbb{P}(N = p).$$

Par la question 1. $N \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Donc $\mathbb{P}(N = p) = \binom{n}{p} \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^{n-p}} = \binom{n}{p} \frac{1}{2^n}$. De plus, par la question précédente, $\mathbb{P}(Y = 1 \mid N = p) = \frac{p}{n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{p=0}^n \frac{p}{n} \binom{n}{p} \frac{1}{2^n}.$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{p}{n}.$$

5. Puisque $Y(\Omega) = \{0; 1\}$, nécessairement, Y suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre : $\mathbb{P}(Y = 1)$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1) &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{p}{n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p}{n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p}{n} + 0 \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^n \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^n \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} \quad \text{en posant } q = p - 1 \\ &= \frac{1}{2^n} (1 + 1)^{n-1} \quad \text{car on reconnaît la formule de Newton} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ce résultat est cohérent, puisque la pièce est équilibrée, le remplissage de l'urne ne favorise pas plus les vertes que les rouges. On a donc autant de chance d'obtenir au premier tirage une verte qu'une rouge. *Cela ne veut pas dire que l'urne possède toujours autant de vertes que de rouges ni même que cela arrive souvent. Mais elle a autant de chances par exemple de n'avoir que des vertes que de n'avoir que des rouges ou de n'avoir qu'une seule verte qu'une seule rouge etc.*

6. On suppose dans cette question uniquement que n est pair. On sait que :

$$(Y = 1) \text{ et } (N = p) \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(Y = 1 \mid N = p) = \mathbb{P}(Y = 1).$$

Donc par les questions précédentes,

$$(Y = 1) \text{ et } (N = p) \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{n} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{n}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(Y = 1) \text{ et } (N = p) \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{n}{2}.}$$

Comme cela ne fonctionne pas pour TOUT $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nécessairement on dira que les variables aléatoires N et Y ne sont pas indépendantes.

7. On cherche $\mathbb{P}(N = n \mid Y = 1)$ sachant que cette probabilité existe car $(Y = 1)$ n'est pas négligeable (de probabilité $1/2 \neq 0$). Par la formule de Bayes car $\mathbb{P}(Y = 1) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(N = n \mid Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(Y = 1 \mid N = n) \mathbb{P}(N = n)}{\mathbb{P}(Y = 1)}.$$

Par la question 3. $\mathbb{P}(Y = 1 \mid N = n) = \frac{n}{n} = 1$. De plus, par la question 5. $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ et par la question 1. $\mathbb{P}(N = n) = \binom{n}{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(N = n \mid Y = 1) = \frac{1 \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(N = n \mid Y = 1) = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

C'est vrai que s'il on a pioché une verte, cela va favoriser les remplissages avec plus de vertes mais de là à favoriser la disposition qu'avec des vertes, c'est n'est pas évident. Cette probabilité reste faible du fait que n'avoir que des vertes est un évènement rare en absolu. Il est finalement plus courant d'obtenir une verte avec une urne contenant quelques rouges que d'avoir une verte issue d'une urne qu'avec des boules vertes.

Partie 2 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$, $b_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $c_k = \mathbb{P}(X_k = 2)$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisqu'il n'y a que deux boules vertes et deux boules rouges, on note que $X_k(\Omega) = \llbracket 0; 2 \rrbracket$. Donc $(X_k = i)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ forme un système complet. Notamment,

$$\mathbb{P}(X_k = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = 2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_k + b_k + c_k = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k + b_k + c_k = 1.}$$

9. Par hypothèse $X_0 = N$. Donc par la question 1. $X_0 \sim \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. Ainsi,

$$a_0 = \binom{2}{0} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad b_0 = \binom{2}{1} \frac{1}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad c_0 = \binom{2}{2} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

On contrôle bien que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$. Conclusion,

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{4} \text{ et } b_0 = \frac{1}{2}.$$

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $X_k = 0$, l'urne A possède donc deux boules rouges et donc l'urne B possède deux boules vertes. Nécessairement, on échangera une boule rouge de A contre une boule verte de B . On obtient donc $X_{k+1} = 1$. Ainsi,

$$\forall j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{0; 2\} \\ 1 & \text{si } j = 1 \end{cases}.$$

Si $X_k = 2$, l'urne A contient deux boules vertes et donc l'urne B possède deux boules rouges, de même on va nécessairement échanger une rouge contre une verte. Ainsi,

$$\forall j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = 2) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{0; 2\} \\ 1 & \text{si } j = 1 \end{cases}.$$

Si $X_k = 1$, l'urne A et l'urne B possèdent chacune une boule rouge et une boule verte. On a alors quatre cas équiprobable :

- On échange les deux vertes,
- On échange les deux rouges,
- on échange la verte de A contre la rouge de B ,
- on échange la rouge de A contre la verte de B .

Dans chaque cas, il faut piocher une boule dans A : probabilité $1/2$ et piocher une boule dans B : probabilité $1/2$. Les deux tirages sont indépendants, on obtient donc pour chaque échange une probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Voyons maintenant le résultat de chaque cas,

- $X_{k+1} = 1$, troquer une verte contre une autre verte ne change pas la composition de A ,
- $X_{k+1} = 1$, même raisonnement pour les rouges,
- $X_{k+1} = 0$, on a perdu la verte et obtenu une rouge en échange,
- $X_{k+1} = 2$, on a perdu la rouge et obtenu une verte en échange.

Chaque cas arrivant avec une probabilité $\frac{1}{4}$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 0 \mid X_k = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 1)$$

tandis que

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion, on résume les valeurs de $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$ dans le tableau suivant

$j \setminus i$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
2	0	$\frac{1}{4}$	0

11. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que $(X_k = i)_{i \in \llbracket 0;2 \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales :

$$a_{k+1} = \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X_{k+1} = 0 \mid X_k = i) \mathbb{P}(X_k = i).$$

Par la question précédente,

$$a_{k+1} = 0 + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(X_k = 1) + 0 = \frac{a_k}{4}.$$

De même,

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = i) \mathbb{P}(X_k = i) \\ &= 1 \times \mathbb{P}(X_k = 0) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_k = 1) + 1 \times \mathbb{P}(X_k = 2) = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k. \end{aligned}$$

Enfin,

$$c_{k+1} = 0 + \frac{b_k}{4} + 0.$$

Conclusion,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+1} = \frac{b_k}{4} \\ b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k \\ c_{k+1} = \frac{b_k}{4} \end{cases}.$$

12. *Méthode 1.*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$b_{k+2} = a_{k+1} + \frac{b_{k+1}}{2} + c_{k+1}.$$

De plus, $a_{k+1} = c_{k+1} = \frac{b_k}{4}$. Donc

$$b_{k+2} = \frac{b_k}{4} + \frac{b_{k+1}}{2} + \frac{b_k}{4} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}.$$

Conclusion,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{k+2} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}.$$

(b) Par la question précédente, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - \frac{r}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

dont le discriminant est $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$. Donc les racines associées sont $r_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Donc

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \lambda 1^k + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

Or, on a vu que $b_0 = \frac{1}{2}$ et par la question 11., $b_1 = a_0 + \frac{b_0}{2} + c_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu &= \frac{1}{2} \\ \lambda - \frac{\mu}{2} &= \frac{3}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= \frac{1}{2} \\ -3\frac{\mu}{2} &= \frac{1}{4} \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{1}{2} - \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ \mu &= -\frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6}.$$

Puis,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = c_k = \frac{b_{k-1}}{4} = \frac{1}{6} - \frac{(-1/2)^{k-1}}{24} = \frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12}.$$

Si $k = 0$, on observe que $\frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} = a_0 = c_0$ et la formule reste vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6} \text{ et } a_k = c_k = \frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12}.}$$

13. Méthode 2.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que $b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k$. Or puisque $(X_k = i)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ forme un système complet, on sait que $a_k + b_k + c_k = 1$ i.e. $a_k + c_k = 1 - b_k$. D'où

$$b_{k+1} = 1 - b_k + \frac{b_k}{2} = 1 - \frac{b_k}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{k+1} = 1 - \frac{b_k}{2}.}$$

(b) On reconnaît cette fois une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\omega = 1 - \frac{\omega}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\omega}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{2}{3}.$$

Fixons $\omega = \frac{2}{3}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k = b_k - \omega$. On observe alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_{k+1} = b_{k+1} - \omega = 1 - \frac{b_k}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{b_k}{2} = -\frac{1}{2} \left(b_k - \frac{2}{3} \right) = -\frac{d_k}{2}.$$

Donc la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k d_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(b_0 - \frac{2}{3}\right).$$

Or on a vu que $b_0 = \frac{1}{2}$. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = d_k + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(b_0 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6}$$

On retrouve bien la valeur de b_k . Puis de même que précédemment, on retrouve les valeurs de a_k et c_k . Conclusion, on obtient à nouveau que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6} \text{ et } a_k = c_k = \frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12}.}$$

14. Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, on obtient $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \frac{2}{3} + 0$. De même pour $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = \frac{1}{6}.}$$

Bien sûr vous aviez repéré que nous étions en présence d'une chaîne de Markov à trois états : 0, 1 et 2. Elle converge donc géométriquement vers une « mesure invariante » qui est donnée par les probabilités asymptotiques ci-dessus. En temps long, on a deux chances sur trois que l'urne A possède une boule verte et une boule rouge, une chance sur six qu'elle possède deux boules vertes et une chance sur six qu'elle possède deux boules rouges. Ces probabilités ne dépendent pas en réalité de la loi de X_0 .

Partie 3 : Un petit pois dans un champ de betteraves

On reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note U_k l'évènement : « l'urne A n'a eu qu'une seule boule verte du début jusqu'à l'étape k (inclusive) ».

15. Pour réaliser U_k il faut qu'à chaque étape entre 0 et k , l'urne A contienne exactement une boule verte i.e. $X_i = 1$ soit réalisé. Donc

$$U_k = \bigcap_{i=0}^k (X_i = 1).$$

16. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On suppose U_i réalisé. On effectue le tirage $i + 1$ dans chaque urne.

- (a) Si U_i est réalisé, alors $(X_i = 1)$ est vérifié et donc l'urne A contient 1 boule verte et $n - 1$ boules rouges. Le tirage étant uniforme parmi les boules de A , la probabilité d'obtenir une boule verte dans A est de $1/n$. Tandis que l'urne B contient $n - 1$ boules vertes et une seule boule rouge. La probabilité d'obtenir une boule verte est donc de $\frac{n-1}{n}$. Les deux tirages étant indépendants, on obtient

$$\alpha = \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.$$

- (b) Toujours sous $(X_i = 1)$, l'urne A contient $n - 1$ boules rouges et l'urne B une seule boule rouge. Donc de même

$$\beta = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.$$

- (c) Sachant U_i réalisé, une seule boule verte est dans l'urne A . Pour garder ensuite la même disposition, il faut ou échanger une boule verte contre une autre boule verte ou échanger une boule rouge contre une autre boule rouge. Ces deux évènements sont disjoints et les probabilités correspondent respectivement aux questions 16.a et 16.b respectivement. On obtient donc

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid U_i) = \alpha + \beta = 2 \frac{n-1}{n^2}.$$

17. Par la question 15.

$$U_k = \bigcap_{i=0}^k (X_i = 1).$$

Donc par la formule des probabilités composées, si $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(U_k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P} \left(X_{i+1} = 1 \mid \bigcap_{j=0}^i (X_j = 1) \right) \right] \mathbb{P}(X_0 = 1) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid U_i) \right] \mathbb{P}(X_0 = 1).$$

Par la question précédente, pour tout $i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid U_i) = \frac{2(n-1)}{n^2}$. D'autre part, $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$. D'où

$$\mathbb{P}(U_k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{2(n-1)}{n^2} \right] \frac{n}{2^n} = \frac{2^k (n-1)^k}{n^{2k}} \frac{n}{2^n} = \frac{(n-1)^k}{n^{2k-1} 2^{n-k}}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{P}(U_k) = \frac{(n-1)^k}{n^{2k-1} 2^{n-k}}.$$

Fin du corrigé