Correction de l'interrogation 10
Equations différentielles d'ordre 1

1. (a) Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I, y_p une solution de

$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de

$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

Alors, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \}.$$

(b) Définir un problème de Cauchy. Propriété ?
Solution. Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

De plus, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

(c) Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
Solution. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$

2. Déterminer les intervalles de résolution puis $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) : $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = \mathrm{e}^x$, d'inconnue y une fonction dérivable.
Solution. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$, on a $\mathrm{sh}(x) \neq 0$ et donc (E) : $\forall x \in I$, $y'(x) - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{sh}(x)}$ dont l'équation homogène associée est donnée par

$$(E_0)\ : \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}y(x) = 0.$$

La fonction $a : x \mapsto -\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ est continue sur **l'intervalle** I donc admet des primitives dont l'une est A : $x \mapsto -\ln(|\mathrm{sh}(x)|)$. Par conséquent,

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{\ln(|\mathrm{sh}(x)|)} = C\,|\mathrm{sh}(x)| \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Or la fonction sh est de signe constant sur I (négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et positive sur $\mathbb{R}_+^*$) et donc, quitte à changer C en $\tilde{C} = -C$, on conclut

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sh}(x) \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{sh}(x) \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. Justifier que l'équation (E) : $y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ donc les fonctions $a : x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$ et $x \mapsto \arctan(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } \mathbb{R}}$.

Posons $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$, λ une fonction dérivable et $y = \lambda\, y_0$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} y(x) = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) y_0(x) + \underbrace{\lambda(x) y_0'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\lambda(x) y_0(x)}_{=0 \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène}} = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) y_0(x) = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)\left(1+x^2\right) = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2} = \arctan'(x)\arctan(x) \qquad \text{car } 1+x^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = \frac{\arctan^2(x)}{2} + C \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \left(\frac{\arctan^2(x)}{2} + C\right)\left(1+x^2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{\arctan^2(x)}{2} + C\right)\left(1+x^2\right) \end{array} \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
Solution. On sait que les racines de x^2+x+1 dans $\mathbb{C}$ sont j et j^2 et que ce polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\text{admet des primitives sur } \mathbb{R}}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Ainsi une primitive F de f est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donnée par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{array} \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. Justifier que $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
Solution. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc notamment sur $[1/2\,;\,2]$. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$.
Posons $u = \frac{1}{t}$ i.e. $t = \frac{1}{u}$ et donc $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{-\ln(u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= -I.
\end{aligned}$$

Donc $2I = 0$. Conclusion,

$$\boxed{I = 0.}$$