# Correction de l'interrogation 11
# Equations différentielles d'ordre 2 et calcul dans R

1. (a) Enoncer le principe de superposition à l'ordre 2.
   *Solution.* Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $d_1 : I \to \mathbb{K}$ et $d_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur $I$ et $(E_1)$, $(E_2)$ et $(E)$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} (E_1) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) \\ (E_2) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x) \\ (E) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x). \end{array}$$

   Si $y_1$ est une solution de $(E_1)$ et si $y_2$ est une solution de $(E_2)$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de $(E)$.

   (b) Donner la définition de la borne supérieure, de la borne inférieure.
   *Solution.* Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\sup(A) = \min\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A\}$$
$$\inf(A) = \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A\}.$$

   (c) Enoncer la formule de Pascal.
   *Solution.* Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x + 3| + |3x - 1| < 2$.
   *Solution.* Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : |x + 3| + |3x - 1| < 2$. On a

$$\begin{array}{ccc} x + 3 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & x \geqslant -3 \\ 3x - 1 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & x \geqslant \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

   *Premier cas,* si $x \leqslant -3$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad -x - 3 - 3x + 1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < 4x \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \text{ impossible car } x \leqslant -3.$$

   Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_1 = \emptyset$.
   *Second cas,* si $x \in \left[-3\,;\,\frac{1}{3}\right]$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 - 3x + 1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < 2x \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x \text{ impossible car } x \leqslant \frac{1}{3}.$$

   Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_2 = \emptyset$.
   *Troisième cas,* si $x \geqslant \frac{1}{3}$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 + 3x - 1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \text{ impossible car } x \geqslant \frac{1}{3}.$$

   Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_3 = \emptyset$.
   Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \emptyset.}$$

3. Déterminer les solutions de l'équation $(\mathscr{P})$ suivante d'inconnue $y$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ :

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 4iy'(t) - 4y(t) = 0 & (E_0) \\ y(1) = 0 \ \text{ ET } y'(1) = \mathrm{e}^{2i}. \end{cases}$$

*Solution.* L'équation caractéristique associée à $(E_0)$ est

$$(E_c) \qquad r^2 - 4ir - 4 = 0.$$

Soit $\Delta$ le discriminant associé. On a $\Delta = -16 + 16 = 0$. Donc l'unique racine double de $(E_c)$ est $r_0 = 2i$. Donc les solutions de $(E_0)$ sont

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (At+B)\,\mathrm{e}^{2it} \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Soit $y$ une fonction deux fois dérivable. On a alors

$$\begin{aligned}
y \text{ solution } (\mathscr{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \in \mathscr{S}_0 \\ y(1) = 0 \;\text{ ET }\; y'(1) = \mathrm{e}^{2i} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R},\; y(t) = (At+B)\,\mathrm{e}^{2it} \\ (A+B)\,\mathrm{e}^{2i} = 0 \;\text{ ET }\; y'(1) = (A + 2i\,(A \times 1 + B))\,\mathrm{e}^{2i} = \mathrm{e}^{2i} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R},\; y(t) = (At+B)\,\mathrm{e}^{2it} \\ B = -A \;\text{ ET }\; A\,\mathrm{e}^{2i} = \mathrm{e}^{2i} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R},\; y(t) = (At+B)\,\mathrm{e}^{2it} \\ A = 1 \;\text{ ET }\; B = -A \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'unique solution est donnée par

$$\boxed{y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (t-1)\,\mathrm{e}^{2it} \end{array}.}$$

4. Déterminer une solution de l'équation $(E)$ suivante d'inconnue $y$ une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - y(t) = 2t^2 + 1$.

   *Solution.* Inutile de connaitre les racines de l'équation caractéristique car le second membre est polynomial. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $y_p : t \mapsto at^2 + bt + c$. La fonction $y_p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, La fonction $y_p$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} y_p'(t) &= 2at + b \\ y_p''(t) &= 2a. \end{aligned}$$

   Par conséquent, on a les équivalences suivantes :

   $$y_p \text{ est une solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2a - at^2 - bt - c = 2t^2 + 1.$$

   On note alors qu'il suffit de vérifier le système suivant pour que $y_p$ soit une solution de $(E)$ :

   $$\begin{cases} -a = 2 \\ -b = 0 \\ 2a - c = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 2a - 1 = -5. \end{cases}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{y_p : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -2t^2 - 5 \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

5. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{\arctan\left(\mathrm{e}^{3x}\right) + \frac{x^2}{2} + 2x\sin(x)}$.

   *Solution.* On observe que $\arctan\left(\mathrm{e}^{3x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Donc $\arctan\left(\mathrm{e}^{3x}\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{x^2}{2}$. De plus,

   $$0 \leqslant \left| \frac{2x\sin(x)}{x^2/2} \right| \leqslant \frac{4}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   donc par le théorème d'encadrement, $\left| \frac{2x\sin(x)}{x^2/2} \right| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $\frac{2x\sin(x)}{x^2/2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $2x\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{x^2}{2}$ Dès lors, on obtient que

   $$\arctan\left(\mathrm{e}^{3x}\right) + \frac{x^2}{2} + 2x\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

   Par élévation à la puissance 1/2 (opération légale), on trouve que

   $$\boxed{f(x) = \sqrt{\arctan\left(\mathrm{e}^{3x}\right) + \frac{x^2}{2} + 2x\sin(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2}}.}$$