

Réponses de l'interrogation 11

Equations différentielles d'ordre 2 et calcul dans $\mathbb{R}$

1. (a) Enoncer le principe de superposition à l'ordre 2.

Solution. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $d_1 : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $d_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et (E_1) , (E_2) et (E) les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1) \quad & \forall x \in I, \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) \\ (E_2) \quad & \forall x \in I, \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x) \\ (E) \quad & \forall x \in I, \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x). \end{aligned}$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et si y_2 est une solution de (E_2) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E) .

- (b) Donner la définition de la borne supérieure, de la borne inférieure.

Solution. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \sup(A) &= \min \{ M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A \} \\ \inf(A) &= \max \{ m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A \}. \end{aligned}$$

- (c) Enoncer la formule de Pascal.

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+3| + |3x-1| < 2$.

Solution. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \emptyset.$$

3. Déterminer les solutions de l'équation $(\mathcal{P})$ suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & y''(t) - 4iy'(t) - 4y(t) = 0 \\ y(1) = 0 \text{ ET } y'(1) = e^{2i}. \end{cases} \quad (E_0)$$

Solution. Conclusion, l'unique solution est donnée par

$$y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (t-1)e^{2i(t-1)}. \end{array}$$

4. Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable :
 $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - y(t) = 2t^2 + 1.$

Solution. Conclusion,

$$y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -2t^2 - 5 \end{array} \text{ est une solution de } (E).$$

5. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{\arctan(e^{3x}) + \frac{x^2}{2} + 2x \sin(x)}$.

Solution. Par élévation à la puissance 1/2 (opération légale), on trouve que

$$f(x) = \sqrt{\arctan(e^{3x}) + \frac{x^2}{2} + 2x \sin(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$