Correction de l'interrogation 12
Calcul dans R et matrices

1. (a) Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
Solution. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Si A est non vide et minorée alors A admet une borne inférieure.
Si A est non vide et majorée alors A admet une borne supérieure.

(b) Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Solution. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x<y,\ \exists r \in \mathbb{Q}, \quad x<r<y.$$

De même l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x<y,\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x<\alpha<y.$$

(c) Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
Solution.
- Soient $a>0$ et $b>0$. On a
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b \left|\ln(x)\right|^a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$
- Soient $a>0$ et $b>0$. On a
$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b \mathrm{e}^{ax} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty.$$

2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;3]\!]}$ telle que $\forall i \in [\![1;3]\!]$, $a_{i,i} = i^2$, $\forall i \in [\![1;2]\!]$, $a_{i,i+1} = -1$, $a_{i+1,i} = i+1$. Sinon, $a_{i,j} = 0$. Préciser A puis calculer A^2.
Solution. On a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$
Par suite,
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 10 & 11 & -13 \\ 6 & 39 & 78 \end{pmatrix}.$$
Conclusion,
$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 10 & 11 & -13 \\ 6 & 39 & 78 \end{pmatrix}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $\sqrt{2x^2+x+1} < 2x+1$.
Solution. Soit Δ le discriminant de $2x^2+x+1$, on a $\Delta = 1-8 = -7 < 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2+x+1>0$. De plus pour $x \in \mathbb{R}$, on a $2x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$. Fixons donc $x \geqslant -\frac{1}{2}$. On a alors,
$$\begin{aligned}
(I) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2+x+1 < (2x+1)^2 \qquad \text{car } 2x^2+x+1 \geqslant 0 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2+x+1 < 4x^2+4x+1\\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 2x^2+3x = 2x\left(x+\frac{3}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{2} \ \text{ OU } \ x>0.
\end{aligned}$$
Or $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Conclusion, l'ensemble solution est
$$\boxed{\mathscr{S} =]0;+\infty[\,.}$$

4. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^2$ tel que B soit majorée, A non vide et $A \subseteq B$. Justifier que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent et montrer que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
Solution. Puisque A est non vide, il existe $a \in A$. Or $A \subseteq B$ donc $a \in B$ et donc B est non vide. De plus, par hypothèse, B est majorée. Donc B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et donc $\sup(B)$ existe. D'autre part, puisque $A \subseteq B$, on a $\forall x \in A, \quad x \in B$. Or $\sup(B)$ est un majorant de B. Donc
$$\forall x \in A, x \leqslant \sup(B).$$
Autrement dit $\sup(B)$ majore A. Donc A est non vide et majorée et $\sup(A)$ existe. Nous avons vu que $\sup(B)$ est un majorant de A et par définition, $\sup(A)$ est le plus petit des majorants. Donc $\sup(A) \leqslant \sup(B)$. Conclusion,
$$\boxed{\sup(A) \text{ et } \sup(B) \text{ existent et } \sup(A) \leqslant \sup(B).}$$

5. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E) : xy''(x) - \left(12x^3+2\right)y'(x) + 45x^5y(x) = 0$. *Indication : poser* $t = x^3$.
Solution. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $z(t) = y(x) = y\left(t^{1/3}\right)$ i.e. $y(x) = z(t) = z\left(x^3\right)$. Puisque y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ l'est aussi, la fonction z est bien définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} y'(x) &= 3x^2z'\left(x^3\right) \\ y''(x) &= 6xz'\left(x^3\right) + 9x^4z''\left(x^3\right). \end{aligned}$$
Par suite,
$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xy''(x) - \left(12x^3+2\right)y'(x) + 45x^5y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\left(6xz'\left(x^3\right) + 9x^4z''\left(x^3\right)\right) - \left(12x^3+2\right)\left(3x^2z'\left(x^3\right)\right) + 45x^5z\left(x^3\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 6x^2z'\left(x^3\right) + 9x^5z''\left(x^3\right) - \left(36x^5+6x^2\right)z'\left(x^3\right) + 45x^5z\left(x^3\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 9x^5z''\left(x^3\right) - 36x^5z'\left(x^3\right) + 45x^5z\left(x^3\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''\left(x^3\right) - 4z'\left(x^3\right) + 5z\left(x^3\right) = 0 \qquad \text{car } x \neq 0. \end{aligned}$$
Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t = x^{1/3}$. Alors,
$$y \text{ est solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(t) - 4z'(t) + 5z(t) = 0. \qquad (F)$$
L'équation caractéristique associée à (F) est $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. Donc les racines sont complexes conjuguées : $r_1 = \frac{4+i\sqrt{4}}{2} = 2+i$ et $r_2 = 2-i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est
$$\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right) \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
Par suite,
$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right) \\ &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = z\left(x^{1/3}\right) = \mathrm{e}^{2x^{1/3}}\left(A\cos\left(x^{1/3}\right) + B\sin\left(x^{1/3}\right)\right). \end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est
$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{2x^{1/3}}\left(A\cos\left(x^{1/3}\right) + B\sin\left(x^{1/3}\right)\right) \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$