Réponses de l'interrogation 12
Calcul dans R et matrices

1. (a) Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
Solution. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Si A est non vide et minorée alors A admet une borne inférieure.
Si A est non vide et majorée alors A admet une borne supérieure.

(b) Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Solution. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists r \in \mathbb{Q}, \quad x < r < y.$$

De même l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x < \alpha < y.$$

(c) Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
Solution.
- Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b \left|\ln(x)\right|^a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$

- Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^b \,\mathrm{e}^{ax} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty.$$

2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;3]\!]}$ telle que $\forall i \in [\![1;3]\!]$, $a_{i,i} = i^2$, $\forall i \in [\![1;2]\!]$, $a_{i,i+1} = -1$, $a_{i+1,i} = i+1$. Sinon, $a_{i,j} = 0$. Préciser A puis calculer A^2.
Solution. Conclusion,

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 10 & 11 & -13 \\ 6 & 39 & 78 \end{pmatrix}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $\sqrt{2x^2 + x + 1} < 2x + 1$.
Solution. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \,]0; +\infty[\,.}$$

4. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^2$ tel que B soit majorée, A non vide et $A \subseteq B$. Justifier que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent et montrer que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
Solution. Conclusion,

$$\boxed{\sup(A) \text{ et } \sup(B) \text{ existent et } \sup(A) \leqslant \sup(B).}$$

5. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) : $xy''(x) - \left(12x^3 + 2\right) y'(x) + 45x^5 y(x) = 0$. *Indication : poser* $t = x^3$.
Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{2x^{1/3}} \left(A\cos\left(x^{1/3}\right) + B\sin\left(x^{1/3}\right)\right) \end{array} \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$