Correction de l'interrogation 13
Matrices

1. (a) Enoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions.
Solution. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

(b) Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique ?
Solution. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.
i. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors f et g ont le même comportement en a : si f converge, g aussi et si f diverge, g aussi. De plus dans tous les cas f et g ont le même signe au voisinage de a.
ii. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell.$$

(c) Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
Solution. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c$. Alors,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \left(\binom{n}{i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left(3^i 2^{-j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice AB.
Solution. On a pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{indépendant de } k} 3^k 2^{-j} = \frac{1}{2^j} \binom{n}{i} \sum_{k=1}^{n} 3^k.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $3 \neq 1$ *et non un binôme de Newton, ouuuuuu le vilain piège vicieux !* Donc

$$c_{ij} = \frac{1}{2^j} \binom{n}{i} 3 \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \binom{n}{i} \frac{3(3^n - 1)}{2^{j+1}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad c_{ij} = \binom{n}{i} \frac{3(3^n - 1)}{2^{j+1}}.}$$

3. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. A l'aide de $B = A - I_2$, calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

Solution. On a $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$B^2 = 9 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $B^k = 0_2$. De plus, B et I_2 commutent. Donc, par la formule du binôme de Newton, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$,

$$A^p = (I_2 + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p} B^k I_2^{p-k} = I_2 + pB + 0_2.$$

Cette formule reste vraie si $p = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \begin{pmatrix} 1 + 3p & 3p \\ -3p & 1 - 3p \end{pmatrix}.}$$

4. Déterminer si $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible ou non et si P est inversible, calculer son inverse.

Solution. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lcl}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On pense à vérifier son résultat que $PP^{-1} = I_3$!

5. Déterminer un équivalent simple quand $n \to +\infty$ de $u_n = \ln^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1$.

Solution. On sait que $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$. Posons $u = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. Alors, on a bien $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Par élévation au carré :

$$\ln^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

D'autre part, pour tout $n > 0$,

$$\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1.$$

Or $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{2}u$. En posant $u = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient bien que

$$\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Or $\frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\ll} \frac{1}{2n}$. Donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\ll} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1.$$

Ainsi,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$