Réponses de l'interrogation 14
Analyse asymptotique I

1. (a) Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
Solution. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $(f,g,h) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^3$ tels que
$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$
Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$
(b) Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre n. Préciser le cas $n=0$ et $n=1$.
Solution. Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.
   i. f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Dans ce cas $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + o(1)$.
   ii. f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce case, $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.
   iii. **SI** f est $\mathscr{C}^n$ **ALORS** f admet un développement limité à l'ordre n.
(c) Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{K})$. Alors,
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{2+x^2}$.
Solution. Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^4\right).}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(x-1) - \ln(x)$.
Solution. Donc en posant $u = \frac{1}{x} \to 0$, on a
$$\boxed{f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kx^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).}$$

4. Déterminer un développement à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ et **en déduire** celui de $F : x \mapsto \frac{\arctan^2(x)}{2}$ à l'ordre 6 en 0.
Solution. Comme $F(0) = \arctan(0)/2 = 0$, on conclut que
$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{23x^6}{90} + o\left(x^6\right).}$$

5. Montrer que la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{4x^2+3x+6} + \ln(1+x) - \ln(x)$ admet une asymptote en $+\infty$, déterminer son équation et préciser la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
Solution. Conclusion, la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation
$$\boxed{y = 2x + \frac{3}{4}.}$$
De plus,
$$f(x) - \left(2x + \frac{3}{4}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{151}{64x},$$
et $\forall x > 0$, $\frac{151}{64x} > 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Conclusion, le graphe de f est
$$\boxed{\text{au dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$