Correction de l'interrogation 15
Ensembles et applications

1. (a) Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
Solution. Soient E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Alors,
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

   (b) Définir l'injectivité et la surjectivité.
Solution. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.
$$\begin{array}{rcl} f \text{ est injective} & \Leftrightarrow & \forall (x, y) \in E^2,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y). \\ f \text{ est surjective} & \Leftrightarrow & \forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x). \end{array}$$

   (c) Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I, y_p une solution de
$$(E) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$
et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$
Alors, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) est donné par
$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \}.$$

2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^7 \end{array}$. Déterminer $f^{-1}\left(\left\{1 + i\sqrt{3}\right\}\right)$.
Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{array}{rcl} z \in f^{-1}\left(\left\{1 + i\sqrt{3}\right\}\right) & \Leftrightarrow & f(z) \in \left\{1 + i\sqrt{3}\right\} \\ & \Leftrightarrow & f(z) = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \\ & \Leftrightarrow & z^7 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in [\![0; 6]\!], \quad z = \sqrt[7]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right)}. \end{array}$$
Conclusion,
$$\boxed{f^{-1}\left(\left\{1 + i\sqrt{3}\right\}\right) = \left\{2^{1/7}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \;\middle|\; k \in [\![0; 6]\!]\right\}}.$$

3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
Solution. Supposons que $A \subseteq B$. Montrons que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition, $f(x) \in A$. Or $A \subseteq B$. Donc $f(x) \in B$, i.e. $x \in f^{-1}(B)$. On a donc démontré que tout élément de $f^{-1}(A)$ est un élément de $f^{-1}(B)$ et donc $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Conclusion
$$\boxed{A \subset B \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).}$$

4. Soient E un ensemble et $f : E \to E$. Montrer que si f est injective et vérifie $f \circ f = f$ alors $f = \mathrm{Id}_E$.
Solution. Soit $x \in E$. On a $f \circ f(x) = f(x)$. Posons $y = f(x)$. Alors on a $f(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = f(y)$. Or f est injective donc $x = y$. Ainsi, $x = f(x)$. Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque on en conclut que
$$\boxed{f = \mathrm{Id}_E}.$$

5. Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \operatorname{ch}(\sin(x))$.
Solution. On a
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$
et
$$\operatorname{ch}(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + o\left(u^3\right).$$
Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. Alors
   - $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.
   - De plus
$$\begin{aligned} u^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^3\right) \\ &\qquad\quad + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$
Donc
$$\frac{u^2(x)}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$
   - On a également $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$. Donc $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Ainsi,
$$f(x) = \operatorname{ch}(\sin(x)) = \operatorname{ch}(u(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x) = \operatorname{ch}(\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).}$$