

Réponses de l'interrogation 16

Continuité-dérivabilité

1. (a) Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.

Solution. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors les deux points suivants sont équivalents :

i. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

ii. pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a , on a $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l .

- (b) Énoncer l'identité des accroissements finis.

Solution. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

- (c) Donner la définition d'un maximum, d'un minimum d'une partie.

Solution. Soient $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} m = \min(A) &\Leftrightarrow m \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad m \leq x \\ M = \max(A) &\Leftrightarrow M \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \leq M. \end{aligned}$$

2. (a) Donner la définition rigoureuse de « la fonction f est positive au voisinage à droite de 1 ».

(b) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{e^{3 \arcsin(t)}}$ est minorée sur $[0; 1]$.

Solution.

- (a) La fonction f est positive au voisinage à droite de 1 s'écrit

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]1; 1 + \eta], \quad f(x) \geq 0.$$

- (b) Notamment,

$$g \text{ admet un minimum.}$$

3. Montrer que $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est 1-lipschitzienne.

Solution. L'inégalité reste vraie si $x = y$. Conclusion,

$$\text{la fonction } f \text{ est 1-lipschitzienne.}$$

4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Solution. On en conclut que

$$f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.$$

5. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{\text{sh}(2x)} - \frac{1}{2x}$.

Solution. Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{3} + \frac{7x^3}{45} + o(x^3).$$