

Correction de l'interrogation 19

Espaces vectoriels

1. (a) Définir et caractériser deux espaces en somme directe.

Solution. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)

$$\forall (x, x') \in F^2, \forall (y, y') \in G^2, \quad (x + y = x' + y') \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

si et seulement si (par caractérisation) :

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

- (b) Énoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.

Solution. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On note $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n$ les coefficients de P et $x_1, \dots, x_n$ les racines de P (éventuellement confondues). Alors

$$1. \quad x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad 2. \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

- (c) Énoncer le théorème de primitivation du développement limité.

Solution. Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n), \quad (a_k)_{k \in [0; n]} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Soit F une primitive de f sur I alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

2. Démontrer si l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0 \right\}$ est un espace vectoriel ou non.

Solution. On note que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de E et pourtant $w = u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E . Donc E n'est pas stable par addition. Conclusion,

E n'est pas un espace vectoriel.

3. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 0 \text{ est une racine de multiplicité } \geq 2 \text{ de } P\}$ et $G = \text{Vect}(1, X^2)$. Déterminer $F + G$ et $F \cap G$ Des points pour chaque.

Solution. Détermination de la somme. On commence par noter que

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X^2 \mid P\} \\ &= \{X^2 Q \in \mathbb{R}_3[X] \mid Q \in \mathbb{R}_1[X]\} \\ &= \{X^2(aX + b) \in \mathbb{R}_3[X] \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(X^2, X^3). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F + G = \text{Vect}(X^2, X^3) + \text{Vect}(1, X^2) = \text{Vect}(X^2, X^3, 1, X^2) = \text{Vect}(X^2, X^3, 1).$$

En permutant les vecteurs, on obtient,

$$F + G = \text{Vect}(1, X^2, X^3).$$

Détermination de l'intersection. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} P \in F \\ P \in G \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = P'(0) = 0 \\ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = a + bX^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b \times 0^2 = 2b \times 0 = 0 \\ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = a + bX^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = a + bX^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}, P = bX^2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$F \cap G = \text{Vect}(X^2).$$

4. Soient $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Solution. Méthode 1, par caractérisation. Soit $M \in F \cap G$. Alors $M \in F$ et $M \in G$. Donc

$$\begin{cases} \text{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, M = \lambda I_2 \end{cases}$$

Donc

$$0 = \text{Tr}(M) = \text{Tr}(\lambda I_2) = 2\lambda.$$

Donc $\lambda = 0_{\mathbb{R}}$ et donc $M = 0_2$. Ainsi, $F \cap G \subseteq \{0_2\}$. Or $\{0_2\} \subseteq F \cap G$ donc

$$F \cap G = \{0_2\}.$$

De plus, pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow \text{Tr}(M) = 0 \\ &\Leftrightarrow a + d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -d \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Par suite,

$$F + G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré :

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) & C_4 \leftarrow C_4 + C_1 \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & C_1 \leftarrow -C_1 \\ & & C_4 \leftarrow \frac{C_4}{2} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & C_1 \leftarrow C_1 + C_4 \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

car on reconnaît la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Méthode 2, par analyse/synthèse.

Analyse. Soit $M \in F + G$. Alors il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Tr}(N) = 0$ et $M = N + \lambda I_2$. Alors, par linéarité de la trace, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N) + \lambda \text{Tr}(I_2) = 0 + 2\lambda$. Donc $\lambda = \frac{\text{Tr}(M)}{2}$. Puis $N = M - \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2$. Cela démontre l'unicité de la décomposition et donc le fait que F et G sont en somme directe.

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $\lambda = \frac{\text{Tr}(M)}{2}$ et $N = M - \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors,

$$M = N + \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2.$$

De plus, $\text{Tr}(N) = \text{Tr}\left(M - \frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2\right) = \text{Tr}(M) - \frac{\text{Tr}(M)}{2} \text{Tr}(I_2) = \text{Tr}(M) - \text{Tr}(M) = 0$. Donc $N \in F$ et naturellement $\frac{\text{Tr}(M)}{2} I_2 \in G$. Donc $M \in F + G$. Ainsi $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \subseteq F + G$. La réciproque étant vraie puisque F et G sont inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'où $F + G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion,

$$F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

5. Déterminer la multiplicité de i pour le polynôme $P = X^{10} + X^8 + X^2 + 1$.

Solution. On observe que

$$P(i) = i^{10} + i^8 + i^2 + 1 = (-1)^5 + (-1)^4 - 1 + 1 = -1 + 1 + 0 = 0.$$

Donc i est une racine de P . De plus, $P' = 10X^9 + 8X^7 + 2X$. Donc

$$P'(i) = 2(5i^9 + 4i^7 + i) = 2i(5i^8 + 4i^6 + 1) = 2i(5(-1)^4 + 4(-1)^3 + 1) = 2i(5 - 4 + 1) = 4i \neq 0.$$

Conclusion,

$$i \text{ est une racine simple de } P.$$