Correction de l'interrogation 20
Familles de vecteurs

1. (a) Définir et caractériser une famille liée.

Solution. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est liée si et seulement si

- L'un des vecteurs au moins de $\mathscr{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
- i.e. il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

(b) Définir et caractériser une base.

Solution. Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si

- $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans E
- i.e.

$$\forall x \in E,\ \exists!\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

(c) Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse.

Solution. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

2. Soit $F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \right\}$. Déterminer une famille génératrice de F.

Solution. On note que F est un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée : $(E_c) : r^2 - r + 1$. Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc les racines associées sont complexes conjuguées : $r = \frac{1 \pm \sqrt{3} i}{2} = \mathrm{e}^{\pm i \frac{\pi}{3}}$. Par conséquent, on obtient que

$$F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1^n \left(\lambda \cos\left(n \frac{\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right) \right\}$$

$$F = \left\{ \lambda \left(\cos\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} + \mu \left(\sin\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$F = \mathrm{Vect}\left(\left(\cos\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{G} = \left(\left(\cos\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \text{ est une famille génératrice de } F.}$$

3. Déterminer si $\mathscr{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est libre ou liée.

Solution. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = O_2.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} a + 2b & -a + b + 3c \\ -2a + 2b + 6c & -a + 2c \end{pmatrix} = O_2.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ -a+b+3c=0 \\ -2a+2b+6c=0 \\ -a+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ 3b+3c=0 \\ 6b+6c=0 \\ 2b+2c=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ b+c=0 \\ 6b+6c=0 \\ 2b+2c=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \text{car } L_3 = 6L_2 \text{ et } L_4 = 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b=2c \\ b=-c. \end{cases}$$

Par exemple, en prenant $a=2$, $b=-1$, $c=1$, on obtient un triplet $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tel que $a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = O_2$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{L} \text{ est liée.}}$$

4. Soit $\mathscr{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto \text{ch}(x), x \mapsto \text{ch}(2x), x \mapsto \text{ch}(3x), x \mapsto \text{ch}(4x), x \mapsto \text{ch}(5x))$. On admet que $\mathscr{B}$ est libre et on pose $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$. Montrer que $f : x \mapsto \text{ch}^5(x)$ appartient à E et déterminer les coordonnées de f dans $\mathscr{B}$.
Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \text{ch}^5(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5}\left(\mathrm{e}^{5x} + 5\,\mathrm{e}^{4x}\mathrm{e}^{-x} + 10\,\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-2x} + 10\,\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-3x} + 5\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-4x} + \mathrm{e}^{-5x}\right) \\ &= \frac{1}{2^5}\left(\mathrm{e}^{5x} + 5\,\mathrm{e}^{3x} + 10\,\mathrm{e}^{x} + 10\,\mathrm{e}^{-x} + 5\,\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-5x}\right) \\ &= \frac{1}{2^4}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{-5x}}{2} + 5\frac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}}{2} + 10\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{16}\,\text{ch}(5x) + \frac{5}{16}\,\text{ch}(3x) + \frac{5}{8}\,\text{ch}(x). \end{aligned}$$

Conclusion, les coordonnées de f dans $\mathscr{B}$ sont

$$\boxed{\left(0, \frac{5}{8}, 0, \frac{5}{16}, 0, \frac{1}{16}\right)}$$

Bonus : montrons que $\mathscr{B}$ est bien une famille libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{5} \lambda_k\,\text{ch}(kx)\right) = 0_E \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{5} \lambda_k\,\text{ch}(kx) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = \mathrm{e}^{-5x}\sum_{k=0}^{5} \lambda_k\,\text{ch}(kx) = \sum_{k=0}^{5} \lambda_k\,\mathrm{e}^{-5x}\,\text{ch}(kx).$$

Or pour tout $k \in [\![0;4]\!]$,

$$\mathrm{e}^{-5x}\,\text{ch}(kx) = \frac{\mathrm{e}^{(k-5)x} + \mathrm{e}^{-(5+k)x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tandis que

$$\mathrm{e}^{-5x}\,\text{ch}(5x) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-10x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc par passage à la limite quand $x \to +\infty$,

$$0 = 0 + \frac{\lambda_5}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_5 = 0.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{4} \lambda_k \operatorname{ch}(kx) = 0_{\mathbb{R}}.$$

On réitère alors le processus pour montrer que $\lambda_4 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$ etc. Donc $\forall i \in [\![0;5]\!]$, $\lambda_i = 0$. Donc $\mathscr{B}$ est bien libre.

On pouvait aussi évaluer en 5 valeurs de x et ainsi obtenir un système de 5 équations avec 5 inconnues que l'on résout pour obtenir $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

5. Soit $F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Solution. On a les égalités entre ensembles suivantes :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y - 2t = 0 \end{cases} \right\} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x = -y - z - t = t - z - t = -z \\ y = -t \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (t,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

On note qu'il manque des pivots en ligne 3 et 4 par exemple. Posons

$$\mathscr{B}_G = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \qquad G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_G) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_F = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

On observe que $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ engendrent respectivement F et G. De plus chacune de ces familles est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont libres donc $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont des bases respectivement de F et G. Posons enfin $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$.

Méthode 1. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors

$$\begin{cases} -a = 0 \\ -b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Soit $u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} a = -x \\ b = -y \\ c = x + z \\ d = y + t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} x = -a \\ y = -b \\ z = c - x = c + a \\ t = d - y = d + b \end{cases}
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que u est quelconque et donc $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = \mathbb{R}^4$ i.e. $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^4$. Ainsi $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^4.}$$

Méthode 2. Les opérations élémentaires ne modifient ni le caractère libre ni le caractère générateur. Or

$$\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array}.$$

On reconnaît alors la base canonique de $\mathbb{R}^4$ qui est libre et génératrice. Donc $\mathscr{B}$ est également libre et génératrice. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^4.}$$