

Correction de l'interrogation 20

Familles de vecteurs

1. (a) Définir et caractériser une famille liée.

Solution. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{L}$ est liée si et seulement si

- L'un des vecteurs au moins de $\mathcal{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{L}$
- i.e. il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

- (b) Définir et caractériser une base.

Solution. Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si

- $\mathcal{B}$ est libre et génératrice dans E
- i.e.

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

- (c) Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse.

Solution. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que

$$f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_E.$$

De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

2. Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$. Déterminer une famille génératrice de F .

Solution. Conclusion,

$$\mathcal{G} = \left(\left(\cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \text{ est une famille génératrice de } F.$$

3. Déterminer si $\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est libre ou liée.

Solution. Conclusion,

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{L} \text{ est liée.}}$$

4. Soit $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto \text{ch}(x), x \mapsto \text{ch}(2x), x \mapsto \text{ch}(3x), x \mapsto \text{ch}(4x), x \mapsto \text{ch}(5x))$. On admet que $\mathcal{B}$ est libre et on pose $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$. Montrer que $f : x \mapsto \text{ch}^5(x)$ appartient à E et déterminer les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.

Solution. Conclusion, les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$ sont

$$\boxed{\left(0, \frac{5}{8}, 0, \frac{5}{16}, 0, \frac{1}{16} \right)}$$

Bonus : montrons que $\mathcal{B}$ est bien une famille libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\left(x \mapsto \sum_{k=0}^5 \lambda_k \text{ch}(kx) \right) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^5 \lambda_k \text{ch}(kx) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = e^{-5x} \sum_{k=0}^5 \lambda_k \text{ch}(kx) = \sum_{k=0}^5 \lambda_k e^{-5x} \text{ch}(kx).$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$,

$$e^{-5x} \text{ch}(kx) = \frac{e^{(k-5)x} + e^{-(5+k)x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Tandis que

$$e^{-5x} \operatorname{ch}(5x) = \frac{1 + e^{-10x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Donc par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 = 0 + \frac{\lambda_5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_5 = 0.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^4 \lambda_k \operatorname{ch}(kx) = 0_{\mathbb{R}}.$$

On réitère alors le processus pour montrer que $\lambda_4 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$ etc. Donc $\forall i \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est bien libre.

On pouvait aussi évaluer en 5 valeurs de x et ainsi obtenir un système de 5 équations avec 5 inconnues que l'on résout pour obtenir $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

5. Soit $F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Solution. Conclusion,

$$G = \operatorname{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^4.$$