

## Correction de l'interrogation 21

### Séries

1. (a) Énoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.

*Solution.* Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  deux séries numériques. Si

$$1 \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

2  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de signe constant à partir d'un certain rang (ou  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ )

Alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  sont de même nature.

- (b) Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?

*Solution.* Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série numérique.

- On dit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge absolument si et seulement si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge.
- La convergence absolue implique la convergence.
- La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$  converge mais ne converge pas absolument car  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  est la série harmonique qui diverge.

- (c) Énoncer le théorème des bornes atteintes.

*Solution.* Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction continue sur le segment  $[a; b]$ . Alors,  $f$  est bornée sur  $[a; b]$  et atteint ses bornes :

$$\exists (\alpha, \beta) \in [a; b]^2, f(\alpha) = m = \min_{t \in [a; b]} f(t) \text{ et } f(\beta) = M = \max_{t \in [a; b]} f(t).$$

2. Déterminer la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^3 + 1)^{1/3} - (n^2 + 1)^{1/2}$ .

**Solution.** Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (n^3 + 1)^{1/3} - (n^2 + 1)^{1/2}$ . On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left( 1 + \frac{1}{n^3} \right)^{1/3} - n \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left( 1 + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) - n \left( 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - n - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ . De plus pour tout  $n \geq 1$ ,  $-\frac{1}{2n} < 0$  et est donc de signe constant. Donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -\frac{1}{2n}$

sont la même nature. Or  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge en tant que série harmonique. Conclusion,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^3 + 1)^{1/3} - (n^2 + 1)^{1/2} \text{ diverge.}$$

3. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|\cos(n)|}{n^e}$ .

**Solution.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq \frac{|\cos(n)|}{n^e} \leq \frac{1}{n^e}.$$

Or  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^e}$  en tant que série de Riemann d'exposant  $\alpha = e > 1$ . Donc par le théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|\cos(n)|}{n^e} \text{ converge.}}$$

4. Déterminer la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2}$ .

**Solution.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq \left| \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = 2 \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Or  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2 \frac{1}{n^{3/2}}$  en tant que série de Riemann d'exposant  $\alpha = 3/2 > 1$ . Donc par le théorème de comparaison,

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2} \right|$  converge i.e.  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2}$  converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2} \text{ converge.}}$$

5. Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+4} \right) \right]$  converge et calculer sa somme totale.

**Solution.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $S_n = \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+4} \right) \right]$ . On a alors,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+4} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+2} \right) \right] + \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+4} \right) \right]. \end{aligned}$$

On reconnaît alors deux séries télescopiques. Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \ln \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{4} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+4} \right) \\ &= \ln \left( \frac{3}{2} \right) + \ln \left( \frac{5}{4} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+4} \right) \\ &= \ln \left( \frac{15}{8} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+4} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+4} \right) = 0$ , alors  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln \left( \frac{15}{8} \right).$$

Conclusion,  $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+4} \right) \right]}$  converge et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n+4} \right) \right] = \ln \left( \frac{15}{8} \right).}$$