

Correction de l'interrogation 22

Dimension

1. (a) Énoncer le théorème de la base incomplète.

Solution. Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie, \mathcal{G} une famille génératrice de E et \mathcal{L} une famille libre de E . En ajoutant des vecteurs de \mathcal{G} à \mathcal{L} , il est possible de construire \mathcal{B} une sur-famille de \mathcal{L} qui soit une base de E .

- (b) Énoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.

Solution. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

De plus, F et G sont supplémentaires dans E si (au moins) deux des assertions suivantes sont vérifiées :

1. $F \cap G = \{0_E\}$.
2. $F + G = E$.
3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

- (c) Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est croissante et que $u_1 \geq u_0$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On le démontre par récurrence bien sûr !

2. Déterminer la dimension de $F = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x + 2z - t + u = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t + 2u = 0 \end{cases} \right\}$.

Solution. Soit $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^6$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (S) : \begin{cases} x + 2z - t + u = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t + 2u = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z - t + u = 0 \\ y + z + t = 0 \\ -y - z - t = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z - t + u = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases} & \text{car } L_3 = L_2 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z + t - u \\ y = -z - t. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Montrons que \mathcal{B}_F est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^5}.$$

Alors

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc \mathcal{B}_F est libre. Or \mathcal{B}_F engendre F . Donc \mathcal{B}_F est une base de F . Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{B}_F) = 3.}$$

3. Justifier que $\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right)$ est libre et la compléter en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution. Notons $\mathcal{L} = (e_1, e_2)$, les deux vecteurs de \mathcal{L} . Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc \mathcal{L} est libre. De plus on a

$$\mathcal{L} \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \right) \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1.$$

Les pivots manquants sont donc en coordonnées 2 et 4 : posons $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et enfin $\mathcal{B} = (\mathcal{L}, e_3, e_4)$. On commence par observer que $\text{Card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

Méthode 1. Montrons de plus que \mathcal{B} est libre. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = O_2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+b & 3a+3b+c \\ 5a-b & 7a+4b+d \end{pmatrix} = O_2 & \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+3b+c=0 \\ 5a-b=0 \\ 7a+4b+d=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ -6b=0 \\ -3b+d=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_1 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=0 \\ d=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{B} est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ qui complète bien } \mathcal{L}.}$$

Méthode 2. Montrons de plus que \mathcal{B} est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a alors

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_3 \leftarrow C_3 + 3C_4 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_3 \leftarrow -\frac{1}{6}C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 - 5C_3 - 7C_4 \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc la famille \mathcal{B} est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ qui complète bien } \mathcal{L}.}$$

Méthode 3. Sans parler du cardinal au début, on a directement,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\mathcal{B}) &= \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ &= \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftrightarrow C_3. \end{aligned}$$

La dernière famille obtenue est échelonnée en ses coordonnées et est donc libre. Son rang est donc égal à son cardinal :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{B}) = 4.$$

Ainsi, $\operatorname{rg}(\mathcal{B}) = \operatorname{Card}(\mathcal{B})$ donc \mathcal{B} est libre et $\operatorname{rg}(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc la famille \mathcal{B} est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ qui complète bien } \mathcal{L}.}$$

4. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille $\mathcal{F} = (f_k : x \mapsto \cos(x + k\frac{\pi}{4}))_{k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket}$. Calculer le rang de \mathcal{F} .

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) \\ f_2(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ f_3(x) &= \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) \\ f_4(x) &= \cos(x + \pi) = -\cos(x). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\mathcal{F}) &= \operatorname{rg} \left(\cos, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin, -\sin, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin, -\cos \right) \\ &= \operatorname{rg}(\cos, 0_E, -\sin, 0_E, 0_E) & C_2 \leftarrow C_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_3 \\ & & C_4 \leftarrow C_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_3 \\ & & C_5 \leftarrow C_5 + C_1 \\ &= \operatorname{rg}(\cos, -\sin) \\ &= \operatorname{rg}(\cos, \sin) & C_2 \leftarrow -C_2. \end{aligned}$$

Or les fonctions \cos et \sin ne sont pas colinéaires donc (\cos, \sin) est libre. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = 2.}$$

5. A l'aide de la dimension, montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = 0_{\mathbb{R}}\}$ et $G = \operatorname{Vect}(X + 3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], P = (X - 2)Q \\ &\Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, P = (X - 2)(a_0 + a_1X + a_2X^2) \\ &\Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, P = a_0(X - 2) + a_1X(X - 2) + a_2X^2(X - 2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \operatorname{Vect}((X - 2), X(X - 2), X^2(X - 2)).$$

Posons $\mathcal{B}_F = (X - 2, X(X - 2), X^2(X - 2))$. Alors \mathcal{B}_F engendre F . De plus, \mathcal{B}_F est une famille de polynômes de degrés distincts, donc \mathcal{B}_F est libre. Donc \mathcal{B}_F est une base de F et ainsi, $\dim(F) = \operatorname{Card}(\mathcal{B}_F) = 3$. Posons $\mathcal{B}_G = (X + 3)$. Par définition, \mathcal{B}_G engendre G et de plus est libre car le vecteur est non nul. Donc $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathcal{B}_G) = 1$.

Méthode 1. Soit $P \in F \cap G$. Alors, $P \in G$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda(X + 3)$. De plus $P \in F$. Donc

$$0 = P(2) = \lambda(2 + 3) = 5\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

D'où $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Or $\{0_{\mathbb{R}[X]}\} \subseteq F \cap G$, donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Conclusion,

$$\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_3[X].}$$