Réponses de l'interrogation 22
Dimension

1. (a) Enoncer le théorème de la base incomplète.

   Solution. Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E. En ajoutant des vecteurs de $\mathscr{G}$ à $\mathscr{L}$, il est possible de construire $\mathscr{B}$ une sur-famille de $\mathscr{L}$ qui soit une base de E.

   (b) Enoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.

   Solution. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a
   $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$
   De plus, F et G sont supplémentaires dans E si (au moins) deux des assertions suivantes sont vérifiées :
   1. $F \cap G = \{0_E\}$.
   2. $F + G = E$.
   3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

   (c) Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?

   Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est croissante et que $u_1 \geqslant u_0$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On le démontre par récurrence bien sûr !

2. Déterminer la dimension de $F = \left\{ (x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} x + 2z - t + u = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t + 2u = 0 \end{cases} \right\}$.

   Solution. Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Or $\mathscr{B}_F$ engendre F. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Conclusion,
   $$\boxed{\dim(F) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_F) = 3.}$$

3. Justifier que $\mathscr{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right)$ est libre et la compléter en une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Solution. Conclusion,

   $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ qui complète bien } \mathscr{L}}$.

4. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère la famille $\mathscr{F} = \left(f_k : x \mapsto \cos\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)\right)_{k\in[\![0;4]\!]}$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.

   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 2.}$$

5. A l'aide de la dimension, montrer que $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = 0_{\mathbb{R}} \}$ et $G = \operatorname{Vect}(X+3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_3[X].}$$