

Correction de l'interrogation 24

Applications linéaires I

1. (a) Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.

Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- le noyau de f est défini par

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

- l'image de f est définie par

$$\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

- (b) Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.

Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

- (c) Définir la somme de deux espaces vectoriels.

Solution. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F + G = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y\}.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) & \mapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T M \end{matrix}$. Déterminer si f est linéaire ou non.

Solution. Si $M = I_n$ et $\lambda = 2$, alors,

$$f(\lambda M) = f(2I_n) = (2I_n)^T (2I_n) = (2I_n)(2I_n) = 4I_n \neq 2I_n = \lambda f(M).$$

Donc $f(\lambda M) \neq \lambda f(M)$. Conclusion,

L'application f n'est pas linéaire.

3. Déterminer le noyau de $\varphi : \begin{matrix} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x^2)f'(x) + f(x) \end{cases} \end{matrix}$ et préciser si φ est injective.

Solution. Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \in E & \Leftrightarrow \varphi(f) = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) + f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + \frac{1}{1+x^2}f(x) = 0. \quad (\mathcal{E}) \quad \text{car } 1+x^2 \neq 0. \end{aligned}$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. La fonction $a : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives dont l'une est donnée par $A : x \mapsto \arctan(x)$. Par conséquent les solutions de (\mathcal{E}) sont

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-\arctan(x)} \end{matrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Conclusion,

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect} \left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\arctan(x)} \end{matrix} \right) \quad \text{et} \quad \varphi \text{ n'est pas injective.}$$

4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $M \mapsto AM - \text{Tr}(M)A$. On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 Déterminer l'image de g et préciser si g est surjective ou non.

Solution. On sait que $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(\mathcal{E})) = \text{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)).$$

Calculons, on a

$$\begin{aligned} g(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ g(e_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ g(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - O_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ g(e_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Im}(g) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) && C_1 \leftrightarrow C_4 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2 \end{array} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow -C_1 \\ C_4 \leftarrow -C_4 \end{array} \\ &= \text{Vect}(\mathcal{E}) && \text{on reconnaît la base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Im}(g) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et } g \text{ est surjective.}}$$

5. Soit $q \in \mathbb{R}_+$. Déterminer suivant les valeurs de q la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n)$.

Solution. Premier cas, $q \geq 1$. Alors, $nq^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (et ce, même si $q = 1$). Donc $\ln(1 + nq^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n)$ diverge grossièrement.

Second cas, $q \in [0; 1[$. Alors, par croissance comparée, $nq^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc

$$\ln(1 + nq^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nq^n.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nq^n \geq 0$. Donc les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$ ont même nature. De plus, $n^3 q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée, car $q \in [0; 1[$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq n^3 q^n \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq nq^n \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{car } n > 0.$$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison,

$\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$ converge. Comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n)$ est de même nature, on obtient dans ce cas que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n)$ converge. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1.}$$