

Réponses de l'interrogation 24

Applications linéaires I

1. (a) Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.

Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- le noyau de f est défini par

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

- l'image de f est définie par

$$\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

- (b) Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.

Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

- (c) Définir la somme de deux espaces vectoriels.

Solution. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F + G = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y\}.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) & \mapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T M \end{matrix}$. Déterminer si f est linéaire ou non.

Solution. Conclusion,

L'application f n'est pas linéaire.

3. Déterminer le noyau de $\varphi : \begin{matrix} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x^2)f'(x) + f(x) \end{cases} \end{matrix}$ et préciser si φ est injective.

Solution. Conclusion,

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect} \left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\arctan(x)} \end{matrix} \right) \quad \text{et} \quad \varphi \text{ n'est pas injective.}$$

4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - \text{Tr}(M)A \end{matrix}$. On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer l'image de g et préciser si g est surjective ou non.

Solution. Conclusion,

$$\text{Im}(g) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g \text{ est surjective.}$$

5. Soit $q \in \mathbb{R}_+$. Déterminer suivant les valeurs de q la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n)$.

Solution. Conclusion,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1 + nq^n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1.$$