# Correction de l'interrogation 25
# Applications linéaires II

1. (a) Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base.
*Solution.* Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose $E$ de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.
   - $f$ est injective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.
   - $f$ est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de $F$.
   - $f$ est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de $F$.

   (b) Définir le rang.
*Solution.* Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose $E$ de dimension finie. Alors le rang de $f$ est défini par
$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

   (c) Définir et caractériser une base.
*Solution.* Soient $E$ un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que $\mathscr{B}$ est une base de $E$ si et seulement si
   - $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans $E$
   - i.e.
$$\forall x \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{l} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{array}$. On admet que $f$ est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de $f$.

**Solution.** Déterminons le noyau. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(M) = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c-b=0 \\ d-a=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=c \\ a=d \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$\operatorname{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $\mathscr{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les matrices n'étant pas colinéaires, $\mathscr{B}$ est libre. Or $\mathscr{B}$ engendre $\operatorname{Ker}(f)$ donc est une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 2$. Puis par le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2.}$$

3. Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ P \to \begin{pmatrix} P(1) & P(2) \\ P'(1) & P'(2) \end{pmatrix} \end{array}$. On admet que $f$ est linéaire. Montrer que $f$ est un isomorphisme.

**Solution.** Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f) \quad & \Leftrightarrow \quad f(P) = 0_2 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} P(1) & P(2) \\ P'(1) & P'(2) \end{pmatrix} = 0_2 \\ & \Leftrightarrow \quad P(1) = P'(1) = P(2) = P'(2) = 0_{\mathbb{R}} \\ & \Leftrightarrow \quad 1 \text{ et } 2 \text{ sont des racines de multiplicité au moins 2 de } P. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $P$ a au moins 4 racines (comptées avec multiplicité) or $\deg(P) \leqslant 3 < 4$. Donc $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. La réciproque étant également vraie, on en déduit que

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}.$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\right\}$ et $f$ est injective. De plus $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on conclut que

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$$

4. Soient $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f + \lambda \operatorname{Id}_E) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.
*Solution.* Soit $x \in \operatorname{Ker}(f + \lambda \operatorname{Id}_E)$. Alors $f(x) + \lambda x = 0_E$ et donc $x = -\frac{1}{\lambda} f(x)$ car $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$. Donc par linéarité de $f$ :

$$x = \underbrace{-\frac{1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} f(x) = f\left(-\frac{1}{\lambda} x\right) \qquad \text{par linéarité de } f.$$

Donc $x$ est l'image de $y = -\frac{1}{\lambda} x$ par $f$. Ainsi, $x \in \operatorname{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour $x \in \operatorname{Ker}(f + \lambda \operatorname{Id}_E)$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f + \lambda \operatorname{Id}_E) \subseteq \operatorname{Im}(f).}$$

5. Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $\mathscr{B} = \left(\varphi(u), \varphi^2(u), \ldots, \varphi^n(u)\right)$ soit libre. Montrer que $\varphi \in \operatorname{GL}(E)$.
**Solution.** On note que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\varphi^k(u) \in \operatorname{Im}(\varphi)$ donc $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs de $\operatorname{Im}(\varphi)$. Puisque $\mathscr{B}$ est libre, on a

$$n = \operatorname{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \dim(\operatorname{Im}(\varphi)).$$

Or $f$ étant un endomorphisme, $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq E$ et donc $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \leqslant \dim(E) = n$. Donc

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = n = \dim(E).$$

et puisque $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq E$, on en déduit que $\operatorname{Im}(\varphi) = E$. Donc $f$ est surjective. De plus $\varphi$ est un endomorphisme dans $E$ qui est de dimension finie. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en déduit que $\varphi$ est un isomorphisme. Conclusion, $\varphi$ est un automorphisme :

$$\boxed{\varphi \in \operatorname{GL}(E).}$$