

Réponses de l'interrogation 25

Applications linéaires II

1. (a) Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base.

Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .
- f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F .
- f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

- (b) Définir le rang.

Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors le rang de f est défini par

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

- (c) Définir et caractériser une base.

Solution. Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que \mathcal{B} est une base de E si et seulement si

- \mathcal{B} est libre et génératrice dans E
- i.e.

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $M \mapsto AM - MA$. On admet que f est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f .

Solution. Déterminons le noyau. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(M) = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c-b=0 \\ d-a=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les matrices n'étant pas colinéaires, \mathcal{B} est libre. Or \mathcal{B} engendre $\text{Ker}(f)$ donc est une base de $\text{Ker}(f)$. Donc $\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2$. Puis par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) = 2.$$

$$\mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

3. Soit $f : P \rightarrow \begin{pmatrix} P(1) & P(2) \\ P'(1) & P'(2) \end{pmatrix}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

Solution. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(1) & P(2) \\ P'(1) & P'(2) \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P(2) = P'(2) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow 1 \text{ et } 2 \text{ sont des racines de multiplicité au moins } 2 \text{ de } P. \end{aligned}$$

Dans ce cas, P a au moins 4 racines (comptées avec multiplicité) or $\deg(P) \leq 3 < 4$. Donc $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. La réciproque étant également vraie, on en déduit que

$$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}.$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$ et f est injective. De plus $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on conclut que

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$$

4. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\text{Ker}(f + \lambda \text{Id}_E) \subseteq \text{Im}(f)$.

Solution. Soit $x \in \text{Ker}(f + \lambda \text{Id}_E)$. Alors $f(x) + \lambda x = 0_E$ et donc $x = -\frac{1}{\lambda}f(x)$ car $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$. Donc par linéarité de f :

$$x = \underbrace{-\frac{1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} f(x) = f\left(-\frac{1}{\lambda}x\right) \quad \text{par linéarité de } f.$$

Donc x est l'image de $y = -\frac{1}{\lambda}x$ par f . Ainsi, $x \in \text{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour $x \in \text{Ker}(f + \lambda \text{Id}_E)$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\text{Ker}(f + \lambda \text{Id}_E) \subseteq \text{Im}(f).}$$

5. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (\varphi(u), \varphi^2(u), \dots, \varphi^n(u))$ soit libre. Montrer que $\varphi \in \text{GL}(E)$.

Solution. On note que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\varphi^k(u) \in \text{Im}(\varphi)$ donc \mathcal{B} est une famille de vecteurs de $\text{Im}(\varphi)$. Puisque \mathcal{B} est libre, on a

$$n = \text{Card}(\mathcal{B}) \leq \dim(\text{Im}(\varphi)).$$

Or f étant un endomorphisme, $\text{Im}(\varphi) \subseteq E$ et donc $\dim(\text{Im}(\varphi)) \leq \dim(E) = n$. Donc

$$\dim(\text{Im}(\varphi)) = n = \dim(E).$$

et puisque $\text{Im}(\varphi) \subseteq E$, on en déduit que $\text{Im}(\varphi) = E$. Donc f est surjective. De plus φ est un endomorphisme dans E qui est de dimension finie. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en déduit que φ est un isomorphisme. Conclusion, φ est un automorphisme :

$$\boxed{\varphi \in \text{GL}(E).}$$