

Réponses de l'interrogation 27

Intégration

1. (a) Énoncer l'inégalité de la moyenne.

Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{C}([a; b])^2$. Puisque f est continue, $\sup_{z \in [a; b]} |f(z)|$ existe dans \mathbb{R} . De plus, puisque $a < b$,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sup_{z \in [a; b]} |f(z)| \int_a^b |g(t)| dt.$$

- (b) Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Solution. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f \in \mathcal{C}(I)$, $a \in I$ et $A \in \mathbb{R}$. Alors la fonction

$$F : \quad I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A + \int_a^x f(t) dt,$$

existe, est continue et même \mathcal{C}^1 sur I et est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(a) = A$.

- (c) Énoncer le théorème de comparaison.

Solution. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Dans ce cas, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

Par contraposée, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

2. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{nx}} dx$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Solution. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n + 3k}$.

Solution. Conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\ln(4)}{3}.$$

4. Soit $\varphi : x \mapsto \int_{1/x}^1 e^{(1/t^2)} dt$. Déterminer le domaine de dérivabilité de φ et calculer sa dérivée.

Solution. Conclusion, φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

5. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 2 entre 1 et $x \in [1; +\infty[$ et montrer que son reste est majoré par $\frac{5}{128\sqrt{2}}(x-1)^3$.

Solution. Ou encore

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{4\sqrt{2}} - \frac{3(x-1)^2}{32\sqrt{2}} \right| \leq \sup_{t \in [1; x]} \left| \frac{15}{8(1+t)^{7/2}} \right| \frac{|x-1|^3}{6}.$$

Or pour tout $t \in [1; x]$, $0 < 2 \leq 1+t \leq 1+x$ donc $0 < 8\sqrt{2} \leq (1+t)^{7/2}$ et $\frac{1}{(1+t)^{7/2}} \leq \frac{1}{8\sqrt{2}}$. Ainsi,

$$\sup_{t \in [1; x]} \left| \frac{15}{8(1+t)^{7/2}} \right| \leq \frac{15}{64\sqrt{2}}.$$

Conclusion, puisque $x \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{13}{16\sqrt{2}} \right| \leq \frac{5}{128\sqrt{2}} (x-1)^3.$$