

Réponses de l'interrogation 05 Complexes

1. (a) Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ tel que $a + b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Développer $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$ et $\tan(a + b)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \\ \tan(a + b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}.\end{aligned}$$

- (b) Énoncer les inégalités triangulaires.

Solution. Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

2. Déterminer la forme algébrique puis polaire de $z = \frac{(2+3i)^2 + (2-3i)^2}{(2+3i)^2 - (2-3i)^2}$.

Solution. Conclusion, la forme algébrique de z est

$$z = \frac{5}{12}i \quad \text{et sa forme polaire :} \quad z = \frac{5}{12} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les complexes, linéariser $\cos^3(x) \sin(x)$.

Solution. Conclusion,

$$\cos^3(x) \sin(x) = \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x).$$

4. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{2iz-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Solution. Conclusion,

$$\frac{2iz-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

5. Linéariser $\sin^2(x)$, en déduire l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $2\sin^2(x) - \sqrt{3}\sin(2x) \geq 2$ et représenter les solutions entre $[-\pi; \pi]$.

Solution. Conclusion, on l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right].$$

En particulier, entre $-\pi$ et π :

