

Réponses de l'interrogation 06

Calcul algébrique

1. (a) Définir le coefficient binomial.

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in \llbracket 0; n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) Enoncer la formule de Pascal.

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer $S_n = \sum_{k=3}^{n+1} 2^k 3^{n-k}$.

Solution. Conclusion,

$$S_n = \frac{8}{3} (3^{n-1} - 2^{n-1}).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n (\ln(n+3-k) - \ln(k))$.

Solution. Conclusion,

$$S_n = \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leq k, l \leq n} \binom{n}{k} \cos \left((k+l) \frac{\pi}{3} \right)$.

Solution. Conclusion,

$$S_n = 2 \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \sin \left((n+1) \frac{\pi}{6} \right) (\sqrt{3})^n.$$

5. Soient $n \in \mathbb{N}$. Calculer $V_n = \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} 2^k \binom{k}{l}$.

Solution. Conclusion,

$$V_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

On vérifie son résultat en prenant $n = 1$ par exemple :

$$V_n = \sum_{0 \leq l \leq k \leq 1} 2^k \binom{k}{l} = \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^k 2^k \binom{k}{l} = \sum_{l=0}^0 2^0 \binom{0}{l} + \sum_{l=0}^1 2^1 \binom{1}{l} = 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = 5$$

Et on a bien $\frac{4^{n+1}-1}{3} = \frac{16-1}{3} = 5$.