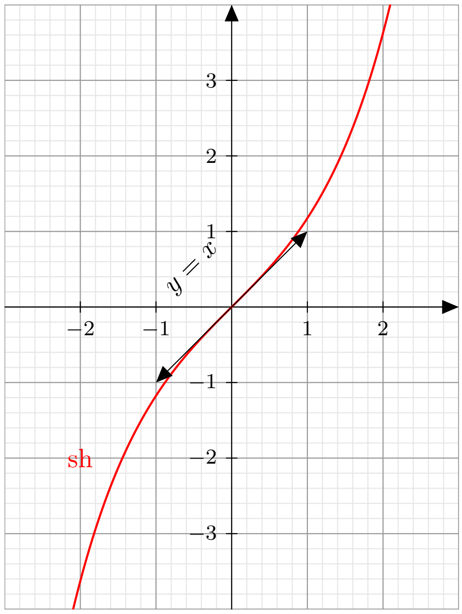
Correction de l'interrogation 07
Fonctions usuelles

1. (a) Tracer le graphe de la fonction sinus hyperbolique y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
Solution.



(b) Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction logarithme et de la fonction arcsinus.
Solution.

- La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) Définir une fonction croissante et une fonction strictement décroissante.
Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est croissante sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad [(x \leqslant y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) \leqslant f(y))].$$

f est strictement décroissante sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad [(x < y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) > f(y))].$$

2. Déterminer le domaine de définition de $f : \ln\left(\frac{(3x)^{5x}}{\sqrt{4(x^{-2})^x}}\right)$ puis développer $f(x)$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{(3x)^{5x}}{\sqrt{4(x^{-2})^x}} > 0 \\ 3x > 0 \\ 4\left(x^{-2}\right)^x > 0 \\ x^{-2} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Donc f est définie sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) = 5x\ln(3x) - \ln\left(2\left(x^{-2}\right)^{x/2}\right) &= 5x\ln(x) + 5x\ln(3) - \ln(2) - \ln\left(x^{-x}\right) \\ &= 5x\ln(x) + 5x\ln(3) - \ln(2) + x\ln(x) \\ &= 6x\ln(x) + 5x\ln(3) - \ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0\,;+\infty[, \qquad f(x) = 6x\ln(x) + 5x\ln(3) - \ln(2).}$$

3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Solution. On a
$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x)}\ln(\ln(x))}.$$
Posons $u = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, par composition,
$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{u}}.$$
Or par croissance comparée, $\lim_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$. Conclusion,
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{\ln(x)}} = \mathrm{e}^0 = 1.}$$

4. Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$. Déterminer $\mathcal{D}_1$ le domaine de **dérivabilité** de f et simplifier f sur $I = \mathcal{D}_1 \cap \mathbb{R}_-$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D}_1 \quad &\Leftarrow \quad \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ -1 < \sqrt{1-x^2} < 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ \sqrt{1-x^2} < 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ 1-x^2 < 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 < 1 \\ x^2 > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left]-1;0\right[\cup \left]0;1\right[.
\end{aligned}$$
Conclusion, f est dérivable sur
$$\boxed{\mathcal{D}_1 = \left]-1;0\right[\cup \left]0;1\right[.}$$
On a donc $I = \mathcal{D}_1 \cap \mathbb{R}_- = \left]-1;0\right[$. De plus, pour tout $x \in I$,
$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \\
&= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}\,|x|}.
\end{aligned}$$
Or $x < 0$ donc $|x| = -x$. Ainsi,
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{-x}{-x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
On reconnait la dérivée de la fonction arcsin. De plus I est un intervalle donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in I, \quad f(x) = \arcsin(x) + K.$$

En particulier pour $x = -\frac{1}{2} \in I$,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + K \quad &\Leftrightarrow \quad \arcsin\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right) = -\frac{\pi}{6} + K \\ &\Leftrightarrow \quad K = \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) + \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad K = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad K = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad K = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = \arcsin(x) + \frac{\pi}{2}.}$$

On peut observer que f est continue sur $[-1;1]$ et donc sur $[-1;0]$. Cette égalité est donc encore vraie sur $[-1;0]$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(3x) - \arctan(x) = \frac{\pi}{6}$.

Solution. Procédons par analyse-synthèse. *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\arctan(3x) - \arctan(x) = \frac{\pi}{6}$, puisque $\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan(\arctan(3x) - \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Or, par définition de la fonction arctan, $\arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc par la formule $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-+\tan(a)\tan(b)}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\tan(\arctan(3x)) - \tan(\arctan(x))}{1+\tan(\arctan(3x))\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad &\Rightarrow \quad \frac{3x-x}{1+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \quad 2\sqrt{3}x = 1+3x^2 \\ &\Rightarrow \quad 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \left(\sqrt{3}x - 1\right)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

On a donc potentiellement une unique solution $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Synthèse. Si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Alors,

$$\arctan(3x) - \arctan(x) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est bien une solution. Conclusion, l'équation admet une unique solution,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.}$$