

Réponses de l'interrogation 08

Equations complexes

1. (a) Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.

Solution. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c$. Alors,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

- (b) Définir j . Que vaut j^2 ? j^3 ? $1 + j + j^2$?

Solution. On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. De plus,

$$j^2 = \bar{j}, \quad j^3 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

- (c) Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.

Solution. Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si

- f est dérivable sur I ,
- strictement monotone sur I ,
- et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$,

alors f^{-1} existe, est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = -7 - 24i$.

Solution. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \{3 - 4i; -3 + 4i\}.$$

Vérification : $(3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$ OK!

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(G) : (z - 2)^5 - z^5 = 0$.

Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (G) est donné par

$$\mathcal{S}_{(G)} = \left\{ \frac{i e^{-i \frac{k\pi}{5}}}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \mid k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket \right\}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 - (1 - i\sqrt{3})z - 1 = 0$.

Solution. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (1 - i); \frac{1 - \sqrt{3}}{2} (1 + i) \right\}.$$

5. Soit $f : z \mapsto (-1 + i)z + 8i - 1$. A quelle transformation du plan correspond f ?

Solution. Conclusion, f est une similitude de centre $\omega = 3i - 2$, d'angle $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et de coefficient homothétique $k = \sqrt{2}$.