Correction de l'interrogation 09
Calcul d'intégrales

1. (a) Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $A \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Si f est continue sur I alors la fonction F définie par
$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$
est $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.
(b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{K})$. Alors,
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
(c) Enoncer le théorème d'intégration par parties.
Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$
(d) Développer $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\tan(a + b)$.
Solution. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que a, b et $a + b$ soient dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. On a
$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a - b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a + b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

2. (a) Sans justification, ni d'étude de domaine de définition, donner les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2(2x))}$.
Solution. On a pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln^2(2x)} = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2},$$
avec $u(x) = \ln(2x)$. Ainsi l'ensemble des primitives de f est donné par
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(\ln(2x)) + C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$
(b) Sans justification, ni d'étude de domaine de dérivabilité, donner la dérivée de $g : x \mapsto \frac{\ln(\arcsin(x))}{\tan(\mathrm{ch}(x))}$ *(on ne cherchera pas à simplifier le résultat).*
Solution. Pour tout x dans le domaine de dérivabilité de g, on a
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\ln(\arcsin(x))' \tan(\mathrm{ch}(x)) - \ln(\arcsin(x))(\tan(\mathrm{ch}(x)))'}{\tan^2(\mathrm{ch}(x))} \\ &= \frac{\frac{\arcsin'(x)}{\arcsin(x)} \tan(\mathrm{ch}(x)) - \ln(\arcsin(x))\,\mathrm{ch}'(x)\left(1 + \tan^2(\mathrm{ch}(x))\right)}{\tan^2(\mathrm{ch}(x))} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)} \tan(\mathrm{ch}(x)) - \ln(\arcsin(x))\,\mathrm{sh}(x)\left(1 + \tan^2(\mathrm{ch}(x))\right)}{\tan^2(\mathrm{ch}(x))}. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{g'(x) = \frac{\tan(\mathrm{ch}(x)) - \ln(\arcsin(x))\,\mathrm{sh}(x)\left(1 + \tan^2(\mathrm{ch}(x))\right)\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)\tan^2(\mathrm{ch}(x))}.}$$

3. Justifier que $I=\displaystyle\int_1^4 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$ existe puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

Solution. La fonction $x\mapsto \ln^2(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1\,;\,4]$ et donc $\boxed{I \text{ existe}}$. De plus, posons pour tout $x\in[1\,;\,4]$,
$$\begin{cases} u(x)=x\ln(x)-x\\ v(x)=\ln(x).\end{cases}$$
Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;\,4]$ et de plus, pour tout $x\in[1\,;\,4]$,
$$\begin{cases} u'(x)=\ln(x)\\ v'(x)=\frac{1}{x}.\end{cases}$$
Donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I&=\left[\ln(x)\left(x\ln(x)-x\right)\right]_{x=1}^{x=4}-\int_1^4\frac{x\ln(x)-x}{x}\,\mathrm{d}x\\ &=\ln(4)\left(4\ln(4)-4\right)-0-\int_1^4\ln(x)-1\,\mathrm{d}x\\ &=16\ln^2(2)-8\ln(2)-\left[x\ln(x)-x-x\right]_{x=1}^{x=4}\\ &=16\ln^2(2)-8\ln(2)-\left(4\ln(4)-8+2\right)\\ &=16\ln^2(2)-16\ln(2)+6.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{I=16\ln^2(2)-16\ln(2)+6.}$$

4. Justifier que $f:x\mapsto\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)(\mathrm{ch}(x)+1)}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide d'un changement de variable.

Solution. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)\geqslant 1$ et $\mathrm{ch}(x)+1\geqslant 2$ donc $\mathrm{ch}(x)\left(\mathrm{ch}(x)+1\right)\neq 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$ et
$$F(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)\left(\mathrm{ch}(t)+1\right)}\,\mathrm{d}t.$$
Posons $s=\mathrm{ch}(t)$, alors $\mathrm{d}s=\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$. Donc
$$\begin{aligned} F(x)&=\int_1^{\mathrm{ch}(x)}\frac{1}{s\,(s+1)}\,\mathrm{d}s\\ &=\int_1^{\mathrm{ch}(x)}\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\,\mathrm{d}s\\ &=\left[\ln\left(|s|\right)-\ln\left(|s+1|\right)\right]_{s=1}^{s=\mathrm{ch}(x)}\\ &=\ln\left(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)+1}\right)+\ln(2).\end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{x\mapsto\ln\left(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)+1}\right)+C\;\middle|\;C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

5. Soit $A(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\mathrm{e}^x-7\right)+o\left(\mathrm{ch}\left(x^2\right)+3x^5\right)$. Simplifier $A(x)$.

Solution. On sait que $7\underset{x\to+\infty}{\ll}\mathrm{e}^x$. Donc
$$o\left(\mathrm{e}^x-7\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\mathrm{e}^x\right).$$
D'autre part, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\left(x^2\right)+3x^5=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}+3x^5$ et
$$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\underset{x\to+\infty}{\ll}3x^5\underset{x\to+\infty}{\ll}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}.$$

Donc
$$o\left(\operatorname{ch}\left(x^2\right)+3x^5\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right).$$
Enfin, pour tout $x>0$,
$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e}^{x-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
Comme $-x^2\left(1-\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, on en déduit par composition que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0.$$
Donc $\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^{x^2}$. Ainsi
$$A(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right) + o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{A(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right).}$$