

Correction de l'interrogation d'entraînement 0 Révisions de calculs

1. Simplifier $A = \frac{\frac{27}{5} + \frac{21}{4}}{1 - \frac{7}{6} + \frac{5}{3}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$A = \frac{\frac{108+105}{20}}{\frac{6-7+10}{6}} = \frac{213}{20} \cdot \frac{6}{9} = \frac{213}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{71}{10}.$$

Conclusion,

$$A = \frac{71}{10}.$$

2. Simplifier $B = \frac{25 \times 12^2 \times 10^3}{24 \times 8^2 \times 12^3}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$B = \frac{5^2 \times 5^3 \times 2^3}{12 \times 2 \times (2^3)^2 \times 12} = \frac{5^5 \times 2^3}{12^2 \times 2^7} = \frac{5^5}{3^2 \times 2^4 \times 2^4} = \frac{5^5}{2^8 \times 3^2}.$$

Conclusion,

$$B = \frac{5^5}{2^8 \times 3^2}.$$

3. Simplifier $C = 4\sqrt{63} - \sqrt{28} + \sqrt{\frac{1}{7}} - 8\sqrt{7}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$C = 4\sqrt{9}\sqrt{7} - \sqrt{4}\sqrt{7} + \frac{1}{\sqrt{7}} - 8\sqrt{7} = 12\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{7} - 8\sqrt{7} = 2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{15}{7}\sqrt{7}.$$

Conclusion,

$$C = \frac{15}{7}\sqrt{7}.$$

4. Simplifier $D = \sqrt{\sqrt{35 \times 56 \times 49 \times 50}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\sqrt{7 \times 5 \times 7 \times 8 \times 7^2 \times 5 \times 10}} \\ &= \sqrt{\sqrt{7^4 \times 5^3 \times 2^4}} \\ &= 7 \times 2 \times \sqrt{\sqrt{5^3}} \\ &= 14\sqrt[4]{5^3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$D = 14\sqrt[4]{5^3}.$$

5. Simplifier $E = \ln(72^3) - \ln(36^2)$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} E &= 3 \ln(72) - 2 \ln(36) \\ &= 3 \ln(9) + 3 \ln(8) - 4 \ln(6) \\ &= 6 \ln(3) + 9 \ln(2) - 4 \ln(2) - 4 \ln(3) \\ &= 2 \ln(3) + 5 \ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$E = 2 \ln(3) + 5 \ln(2).$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $F = \sqrt{\frac{e^{x^2}}{e^{2x-1}}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$F = \sqrt{e^{x^2-2x+1}} = \sqrt{e^{(x-1)^2}} = e^{\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

Conclusion,

$$F = e^{\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $G = (3x + 2)^4$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} G &= (9x^2 + 12x + 4)^2 \\ &= 81x^4 + 144x^2 + 16 + 2 \times 108x^3 + 2 \times 36x^2 + 2 \times 48x \\ &= 81x^4 + 144x^2 + 16 + 216x^3 + 72x^2 + 96x. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$G = 81x^4 + 216x^3 + 72x^2 + 96x + 16.$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $H = 9x^8 - 4x^2 + 3x^4 + 2x$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} H &= (3x^4)^2 - (2x)^2 + 3x^4 + 2x \\ &= (3x^4 - 2x)(3x^4 + 2x) + 3x^4 + 2x \\ &= (3x^4 + 2x)(3x^4 - 2x + 1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$H = (3x^4 + 2x)(3x^4 - 2x + 1).$$

9. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Solution. Soit Δ le discriminant associé à $x^2 + x + 1$. On a $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc $x \mapsto x^2 + x + 1$ est de signe constant et en particulier strictement positive. Donc f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 2)(x^2 + x + 1) - (x^3 - 2x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x - 2 - (2x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x - 3}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x - 3}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

10. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $g : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{(3x^2 + 1)^7}\right)$.

Solution. La fonction cosinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 1 > 0$. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= -\frac{7(6x)}{(3x^2 + 1)^8} \left(-\sin\left(\frac{1}{(3x^2 + 1)^7}\right) \right) \\ &= \frac{42x}{(3x^2 + 1)^8} \sin\left(\frac{1}{(3x^2 + 1)^7}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{42x}{(3x^2 + 1)^8} \sin\left(\frac{1}{(3x^2 + 1)^7}\right).$$

11. *BONUS : à ne faire qu'en dernier.*

Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver la fonction $h : x \mapsto \sqrt{2 \ln^2(x) + \ln(x^2) - 3 \ln(x)}$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} h \text{ dérivable en } x &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2(x), \ln(x^2), \ln(x^2) \text{ existent} \\ 2 \ln^2(x) + \ln(x^2) - 3 \ln(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2 \ln^2(x) + 2 \ln(x) - 3 \ln(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2 \ln^2(x) - \ln(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (2 \ln(x) - 1) \ln(x) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $x > 0$. Posons $X = \ln(x)$. On a $(2X - 1)X > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; 0[\cup]1/2; +\infty[$. Par conséquent, pour $x > 0$,

$$h \text{ dérivable en } x \Leftrightarrow \ln(x) < 0 \text{ OU } \ln(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < 1 \text{ OU } x > e^{1/2},$$

par la stricte croissance de la fonction exponentielle. Ainsi le domaine de dérivabilité de h est $\mathcal{D} =]0; 1[\cup]e^{1/2}; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sqrt{2 \ln^2(x) + \ln(x)} \right)' \\ &= \frac{(2 \ln^2(x) + \ln(x))'}{2 \sqrt{2 \ln^2(x) + \ln(x)}} \\ &= \frac{4 \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{(2 \ln(x) + 1) \ln(x)}} \\ &= \frac{4 \ln(x) + 1}{x \sqrt{(2 \ln(x) + 1) \ln(x)}}. \end{aligned}$$

Conclusion, h est dérivable sur $\mathcal{D} =]0; 1[\cup]e^{1/2}; +\infty[$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad h'(x) = \frac{4 \ln(x) + 1}{x \sqrt{(2 \ln(x) + 1) \ln(x)}}.$$