

Interrogation 1 d'entraînement Logique et raisonnement

1. Restituer le cours.

1.1 Énoncer les lois de Morgan.

1.2 Définir logiquement une implication.

1.3 Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation d'une implication.

Manipuler les implications et équivalences. Compléter avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(x, a) \in \mathbb{R}^2$, $(y, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle)

$$1.4 \quad \cos(x) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$1.5 \quad e^x \geq 1 \quad \dots\dots\dots \quad x \geq 0.$$

$$1.6 \quad z \in \mathbb{R} \quad \dots\dots\dots \quad \operatorname{Re}(z) = z.$$

$$1.7 \quad x = y \quad \dots\dots\dots \quad \cos(x) = \cos(y).$$

$$1.8 \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \quad \dots\dots\dots \quad \begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}.$$

$$1.9 \quad \ln(x) \geq 0 \quad \dots\dots\dots \quad x > 1.$$

$$1.10 \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \quad \dots\dots\dots \quad u_{25} > u_{20}.$$

$$1.11 \quad x \geq \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots \quad \cos(x) \leq 0.$$

$$1.12 \quad x^2 \geq 25 \quad \dots\dots\dots \quad x \geq 5.$$

$$1.13 \quad \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \quad \dots\dots\dots \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, f(x) > B.$$

2. Réciproque/contraposée/négation.

2.1 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = \cos(y).$$

2.2 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$[(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R})] \\ \Rightarrow \quad \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \right]$$

2.3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

2.4 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq a.$$

2.5 Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$[\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))] \\ \Rightarrow \quad [\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)].$$

3. Quantificateurs.

- 3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit monotone puis sa négation.
- 3.2 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis sa négation.
- 3.3 Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que π soit irrationnel puis sa négation.
- 3.4 Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que toutes les fonctions de $\mathcal{E}$ sont positives sur $\mathbb{R}$ puis sa négation.
- 3.5 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f ne prenne que des valeurs entières puis sa négation.

4. Récurrence.

- 4.1 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 4.2 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 4.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
- 4.4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^n - 1}{2}$.
- 4.5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - (-2)^n$.
- 4.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conjecturer une expression simple de u_n puis le démontrer rigoureusement.

5. Calcul dans $\mathbb{R}$.

- 5.1 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$.
- 5.2 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x - 1} = \sqrt{2x + 1}$.
- 5.3 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x + 5} = \sqrt{2x + 2}$.
- 5.4 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{2x^2 - x - 3} = x + 1$.
- 5.5 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = -1 + \sqrt{x^2 - 2}$.