

Interrogation 10 d'entraînement Equations différentielles d'ordre 1

1. Restituer le cours.

- 1.1 Énoncer le théorème donnant l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions d'une équation homogène d'ordre 1.
- 1.2 Énoncer la proposition qui affirme que l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
- 1.3 Énoncer le théorème donnant l'ensemble \mathcal{S} des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
- 1.4 Énoncer le principe de superposition.
- 1.5 Définir un problème de Cauchy. Propriété ?

Révisions

- 1.6 Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
- 1.7 Énoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
- 1.8 Énoncer les inégalités triangulaires.
- 1.9 Énoncer les formules d'Euler.
- 1.10 Énoncer la formule de Moivre.

2. Déterminer les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1. Déterminer les intervalles de résolution puis \mathcal{S}_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) d'inconnue y une fonction dérivable.

- 2.1 $(E) : y'(t) - 5t^2y(t) = 3t(y(t) + 2).$
 - 2.2 $(E) : \operatorname{ch}^4(s)y'(s) + \operatorname{sh}(s)y(s) = 1.$
 - 2.3 $(E) : (u^2 + 7)y'(u) = 5 - 3uy(u).$
 - 2.4 $(E) : \sqrt{1 - x^2}y'(x) = y(x) + 8.$
 - 2.5 $(E) : y(r)\sin(r) + \cos(r)y'(r) = 0.$
 - 2.6 $(E) : (a^3 + 3a^2 + 7a + 8)y'(a) + (3a^2 + 6a + 7)y(a) = 8a^3 - 5a^2 + 2a + 4$ sur $I = \mathbb{R}_+.$
 - 2.7 $(E) : t\sqrt{\ln(t)}y'(t) + \ln(t) + y(t) = 0.$
 - 2.8 $(E) : \cos^2(s)y'(s) + \sin(s)y(s) = -y'(s).$
 - 2.9 $(E) : \sqrt{1 - u^2}y'(u) + \arcsin(u)y(u) = \arccos(u).$
 - 2.10 $(E) : y'(x) + e^{x+e^x}y(x) = e^{2x}.$
- Pour les gourmands, en voici d'autres :
- 2.11 $(E) : y'(r) + 8r\sqrt{4r^2 - 1}y(r) = 0.$
 - 2.12 $(E) : \frac{y'(a) + 9y(a)}{9} = -a^2y'(a).$
 - 2.13 $(E) : \theta \ln(\theta)y'(\theta) = y(\theta) + \sin(\theta).$
 - 2.14 $(E) : t^6y'(t) + t^2y(t) = 5t - y'(t).$
 - 2.15 $(E) : s(1 + \ln^2(s))y'(s) + y(s) = \ln(s).$
 - 2.16 $(E) : \sqrt{u}y'(u) + e^{\sqrt{3u}}y(u) = 5u^2 - 6.$

3. Savoir appliquer la méthode de variation de la constante.

3.1 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{2x}{1-x^2}y(x) = \sqrt{1-x^2}$ admet des solutions sur $I =]-1; 1[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.

On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1 - x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.

3.2 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = 1 + \ln(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.

On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.

Intégrer $x \mapsto x \ln(x)$ par une intégration par parties.

3.3 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) - 2y(x) = \cos(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.

On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto e^{2x}$ est une solution de l'équation homogène associée.

3.4 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{x(x+1)}y(x) = (x+1) \arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.

On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est une solution de l'équation homogène associée.

3.5 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = \sin(x)$ admet des solutions sur $I =]-1; +\infty[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.

On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.

4. Savoir intégrer l'inverse d'un trinôme.

4.1 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{3x^2-21x+30}$ admet des primitives sur \mathbb{R}_-^* et les déterminer.

4.2 Justifier que $f : x \mapsto \frac{x^3}{x+2}$ admet des primitives sur $] -2; +\infty[$ et les déterminer.

4.3 Justifier que $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2+x+4}$ admet des primitives sur \mathbb{R} et les déterminer.

4.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{x^3+3x^2+2x}$ admet des primitives sur \mathbb{R}_+^* et les déterminer.

4.5 Justifier que $f : x \mapsto \frac{6x^2-11x+24}{2x^2-4x+8}$ admet des primitives sur \mathbb{R} et les déterminer.

5. Savoir faire un changement de variable.

5.1 Justifier que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos^5(t) dt$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$.

5.2 Justifier que $f : x \mapsto x^2 \sqrt{1-x^2}$ admet des primitives sur $[-1; 1]$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $x = \cos(u)$.

5.3 Justifier que $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \arctan(t) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

5.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ admet des primitives sur \mathbb{R} et les déterminer à l'aide du changement de variable $u = e^t$.

5.5 Justifier que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(x)} dx$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.