Correction de l'interrogation 10 d'entrainement
Equations différentielles d'ordre 1

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une fonction continue sur I, A une primitive de a sur I alors l'ensemble des solutions de

$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

est donnée par

$$\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.2 L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène vérifie :

- La fonction nulle est dans $\mathscr{S}_0$
- Pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}_0^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0$.

1.3 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I, y_p une solution de

$$(E) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de

$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

Alors, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \}.$$

1.4 Soient I un intervalle, a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I, y_1 une solution de

$$(E_1) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x)$$

et y_2 une solution de

$$(E_2) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_2(x).$$

Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de

$$(E) \qquad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

1.5 Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I, \; y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

De plus, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

2. **Déterminer les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1.**

2.1 On a $(E) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \; y'(t) - \left(5t^2 + 3t\right) y(t) = 6t$ donc l'équation homogène associée est

$$(E_0) \; : \forall t \in \mathbb{R}, \; y'(t) - \left(5t^2 + 3t\right) y(t) = 0.$$

La fonction $t \mapsto -\left(5t^2 + 3t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $t \mapsto -\frac{5}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{\frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2.2 L'équation homogène associée à (E) est (E_0) : $\forall s \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^4(s)y'(s) + \mathrm{sh}(s)y(s) = 0$. De plus pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(s) > 0$ donc

$$(E_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall s \in \mathbb{R},\ y'(s) + \frac{\mathrm{sh}(s)}{\mathrm{ch}^4(s)}y(s) = 0$$

La fonction $s \mapsto \frac{\mathrm{sh}(s)}{\mathrm{ch}^4(s)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $s \mapsto -\frac{1}{3\,\mathrm{ch}^3(s)}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \mathrm{e}^{\frac{1}{3\,\mathrm{ch}^3(s)}} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3\,\mathrm{ch}^3(s)}} \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2.3 Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $u^2 + 7 \geqslant 7 > 0$. Donc $(E) \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R},\ y'(u) + \frac{3u}{u^2+7}y(u) = \frac{5}{u^2+7}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0)\ : \forall u \in \mathbb{R},\ y'(u) + \frac{3u}{u^2+7}y(u) = 0.$$

La fonction $u \mapsto \frac{3u}{u^2+7}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $u \mapsto \frac{3}{2}\ln\left(\left|u^2+7\right|\right) = \frac{3}{2}\ln\left(u^2+7\right)$. Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\ln\left(u^2+7\right)} = \frac{1}{(u^2+7)^{3/2}}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{(u^2+7)^{3/2}} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{C}{(u^2+7)^{3/2}} \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\sqrt{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1;1\right[$. Donc $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1;1\right[\ y'(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y(x) = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0)\ : \forall x \in \left]-1;1\right[\ y'(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y(x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur l'intervalle $\left]-1;1\right[$ donc admet des primitives sur $\left]-1;1\right[$ dont l'une est donnée par $x \mapsto -\arcsin(x)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\arcsin(x)} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{\arcsin(x)} \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2.5 Soit $k \in \mathbb{N}$ et $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. On a sur I_k, $(E) \Leftrightarrow \forall r \in I_k,\ y'(r) + \tan(r)y(r) = 0$. On note que (E) est homogène. La fonction tan est continue sur l'intervalle I_k donc admet des primitives sur I_k dont l'une est donnée par $r \mapsto -\ln\left(|\cos(r)|\right)$.Conclusion,

$$\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & |\cos(r)| \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,|\cos(r)| \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

La fonction cos est de signe constant sur I_k donc, quitte à changer C en $-C$,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & \cos(r) \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\cos(r) \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2.6 Pour tout $a \geqslant 0$, $a^3+3a^2+7a+8 \geqslant 8 > 0$. Donc $(E) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}_+,\ y'(a) + \frac{3a^2+6a+7}{a^3+3a^2+7a+8}y(a) = \frac{8a^3-5a^2+2a+4}{a^3+3a^2+7a+8}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0)\ : \forall a \in \mathbb{R}_+,\ y'(a) + \frac{3a^2+6a+7}{a^3+3a^2+7a+8}y(a) = 0.$$

La fonction $a \mapsto \frac{3a^2+6a+7}{a^3+3a^2+7a+8}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ dont l'une est donnée par $a \mapsto \ln\left(\left|a^3+3a^2+7a+8\right|\right) = \ln\left(a^3+3a^2+7a+8\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \frac{1}{a^3+3a^2+7a+8} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \frac{C}{a^3+3a^2+7a+8} \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2.7 Pour tout $t>1$, on a $t\sqrt{\ln(t)}>0$, donc $(E) \iff \forall t\in\,]1;+\infty[\,,\ y'(t)+\frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}y(t)=-\frac{\ln(t)}{t\sqrt{\ln(t)}}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0)\ :\forall t\in\,]1;+\infty[\,,\ y'(t)+\frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}y(t)=0.$$

La fonction $t\mapsto \frac{1/t}{\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$ donc admet des primitives sur $]1;+\infty[$ dont l'une est donnée par $t\mapsto 2\sqrt{\ln(t)}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-2\sqrt{\ln(t)}}\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-2\sqrt{\ln(t)}}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2.8 On a $(E)\iff \forall s\in\mathbb{R},\ \left(1+\cos^2(s)\right)y'(s)+\sin(s)y(s)=0$. On a pour tout $s\in\mathbb{R}$, $1+\cos^2(s)\geqslant 1>0$. Donc

$$(E)\iff \forall s\in\mathbb{R},\ y'(s)+\frac{\sin(s)}{1+\cos^2(s)}y(s)=0.$$

On note que (E) est homogène. La fonction $s\mapsto\frac{\sin(s)}{1+\cos^2(s)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $s\mapsto-\arctan\left(\cos(s)\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ s & \mapsto & \mathrm{e}^{\arctan(\cos(s))}\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ s & \mapsto & \mathrm{e}^{\arctan(\cos(s))}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2.9 Pour tout $u\in\,]-1;1[$, on a $\sqrt{1-u^2}>0$. Donc $(E)\iff\forall u\in\,]-1;1[\ y'(u)+\frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}}y(u)=\frac{\arccos(u)}{\sqrt{1-u^2}}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0)\ :\forall u\in\,]-1;1[\ y'(u)+\frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}}y(u)=0.$$

La fonction $u\mapsto\frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}}$ est continue sur l'intervalle $]-1;1[$ donc admet des primitives sur $]-1;1[$ dont l'une est donnée par $u\mapsto\frac{1}{2}\arcsin^2(u)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R}\\ u & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{\arcsin^2(u)}{2}}\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R}\\ u & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\frac{\arcsin^2(u)}{2}}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2.10 L'équation homogène associée est $(E_0):\forall x\in\mathbb{R}\ y'(x)+\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}y(x)=0$. La fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $x\mapsto\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Voici juste les conclusions des dernières questions :

2.9 Pour $I=[1/2;+\infty[$ ou $I=\,]-\infty;-1/2]$,

$$\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}\\ r & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(4r^2-1\right)^{3/2}}\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}\\ r & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(4r^2-1\right)^{3/2}}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.$$

2.10 $\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ a & \mapsto & \mathrm{e}^{-3\arctan(3a)}\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ a & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-3\arctan(3a)}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.$

2.11 Pour $I=\,]0;1[$ ou $I=\,]1;+\infty[$, $\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}\\ \theta & \mapsto & \ln(\theta)\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}\\ \theta & \mapsto & C\ln(\theta)\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.$

2.12 $\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{\arctan\left(t^3\right)}{3}}\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\frac{\arctan\left(t^3\right)}{3}}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.$

2.13 Pour $I=\,]0;1[$ ou $I=\,]1;+\infty[$, $\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}\\ \theta & \mapsto & \ln(\theta)\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}\\ \theta & \mapsto & C\ln(\theta)\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.$

2.14 $\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{e}^{\sqrt{3u}}} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{e}^{\sqrt{3u}}} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$

2.15 $\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \mathrm{e}^{-\arctan(\ln(s))} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\arctan(\ln(s))} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$

2.16 $\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{3u}}} \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{3u}}} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$

3. **Savoir appliquer la méthode de variation de la constante.**

3.1 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$ et $b : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sont continues sur $I =]-1\,;1[$, donc

$$\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } I\ .}$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{cl} & y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{2x}{1-x^2}\lambda(x)y_0(x)}_{=0} = \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\quad \lambda'(x)y_0(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\quad \lambda'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{car } y_0(x) \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad \lambda(x) = \arcsin(x) + C \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = (\arcsin(x) + C)\left(1 - x^2\right). \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{r}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto (\arcsin(x) + C)\left(1-x^2\right) \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3.2 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $b : x \mapsto 1 + \ln(x)$ sont continues sur $I = \mathbb{R}_+^*$, donc

$$\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } I\ .}$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{cl} & y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{1}{x+1}\lambda(x)y_0(x)}_{=0} = 1 + \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\quad \lambda'(x)y_0(x) = 1 + \ln(x) \qquad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\quad \lambda'(x) = (x+1)(1+\ln(x)) = x + 1 + x\ln(x) + \ln(x) \qquad \text{car } y_0(x) \neq 0. \end{array}$$

La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur I donc admet des primitives sur I. Soit $x \in I$ et

$$F(x) = \int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$\forall t \in I, \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \ln(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \qquad \begin{cases} u'(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$F(x)=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_{t=1}^{t=x}-\int_1^x\frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{x^2\ln(x)}{2}-\left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=1}^{t=x}=\frac{x^2\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

On a ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow\quad \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\quad \lambda(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{x^2\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}+x\ln(x)-x+C\\ &\Leftrightarrow\quad \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\quad \lambda(x)=\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x}{2}+1\right)x\ln(x)+C\\ &\Leftrightarrow\quad \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\quad y(x)=\lambda(x)y_0(x)=\frac{\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x}{2}+1\right)x\ln(x)+C}{x+1}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x}{2}+1\right)x\ln(x)+C}{x+1}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

3.3 Les fonctions $a: x\mapsto -2$ et $b: x\mapsto\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{(E)\ \text{admet des solutions sur } I\ .}$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $y(x)=\lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &y \text{ solution de } (E)\\ \Leftrightarrow\quad &\forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda'(x)y_0(x)+\underbrace{\lambda(x)y_0'(x)-2\,\lambda(x)y_0(x)}_{=0}=\cos(x)\\ \Leftrightarrow\quad &\forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda'(x)y_0(x)=\cos(x) \qquad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène}\\ \Leftrightarrow\quad &\forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda'(x)=\cos(x)\,\mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{car } y_0(x)\neq 0. \end{aligned}$$

La fonction $x\mapsto\cos(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$ et

$$F(x)=\int_0^x\cos(t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\begin{aligned} F(x)=\int_0^x\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t\right)&=\mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-2)t}}{i-2}\right]_{t=0}^{t=x}\right)\\ &=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(i-2)x}-1}{i-2}\right)\\ &=\mathrm{Re}\left(\frac{-(2+i)\left(\mathrm{e}^{-2x}\cos(x)+i\,\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)-1\right)}{4+1}\right)\\ &=\frac{-2\left(\mathrm{e}^{-2x}\cos(x)-1\right)+\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)}{5}\\ &=\frac{\mathrm{e}^{-2x}\left(\sin(x)-2\cos(x)\right)}{5}+\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow\quad \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\quad \lambda(x)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2x}\left(\sin(x)-2\cos(x)\right)+C\\ &\Leftrightarrow\quad \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\quad y(x)=\lambda(x)y_0(x)=\frac{1}{5}\left(\sin(x)-2\cos(x)\right)+C\,\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{\sin(x)-2\cos(x)}{5}+C\,\mathrm{e}^{2x}\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

3.4 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ et $b : x \mapsto (x+1)\arctan(x)$ sont continues sur $I = \mathbb{R}_+^*$, donc

$$\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } I\ .}$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{1}{x(x+1)}\lambda(x)y_0(x)}_{=0} = (x+1)\arctan(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) = (x+1)\arctan(x) \text{ car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = (x+1)\arctan(x)\frac{x}{x+1} = x\arctan(x) \qquad \text{car } y_0(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x\arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ et donc sur I. Soient $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x t\arctan(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \arctan(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} u'(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
F(x) = \left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\left[t - \arctan(t)\right]_{t=0}^{t=x} \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{x - \arctan(x)}{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{x^2+1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + C \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{\left(x^2+1\right)(x+1)}{2x}\arctan(x) - \frac{x+1}{2} + C\frac{x+1}{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\left(x^2+1\right)(x+1)}{2x}\arctan(x) - \dfrac{x+1}{2} + C\dfrac{x+1}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3.5 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $b : x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur $I =]1\,;+\infty[$, donc

$$\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } I\ .}$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{1}{1+x}\lambda(x)y_0(x)}_{=0} = \sin(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) = \sin(x) \qquad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \sin(x)\,(1+x) \qquad \text{car } y_0(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \sin(x)\,(1+x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ et donc sur I. Soient $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x \sin(t)\,(1+t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} u(t) = -\cos(t) \\ v(t) = 1+t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} u'(t) = \sin(t) \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$F(x) = \left[-(1+t)\cos(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = 1 - (1+x)\cos(x) + \sin(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \sin(x) - (1+x)\cos(x) + C \\
& \Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{\sin(x) - (1+x)\cos(x) + C}{1+x}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x) - (1+x)\cos(x) + C}{1+x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. **Savoir intégrer l'inverse d'un trinôme.**

4.1 Soit Δ le discriminant de $x^2-7x+10$. On a $\Delta=49-40=9>0$. Donc les racines associées sont $x_1=\frac{7-3}{2}=2$ et $x_2=\frac{7+3}{2}=5$. Donc la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{3(x^2-7x+10)}$ est définie sur $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,5[\cup]5\,;\,+\infty[$. Donc f est définie et même continue sur $I=\mathbb{R}_-^*\subseteq]-\infty\,;\,2[$. Dès lors, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}_-^*}$. De plus, pour tout $x\in I$,

$$f(x)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{(x-2)(x-5)}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2;5\},\quad f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-5}.$$

Méthode 1. On a

$$a=\lim_{\substack{x\to2\\x\neq2}}(x-2)\,f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\x\neq2}}\frac{1}{3\,(x-5)}=-\frac{1}{9}.$$

De même,

$$b=\lim_{\substack{x\to5\\x\neq5}}(x-5)\,f(x)=\frac{1}{3\,(x-2)}=\frac{1}{9}.$$

Par conséquent,

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\frac{1/9}{x-5}-\frac{1/9}{x-2}.$$

Méthode 2. On a pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$,

$$f(x)=\frac{(a+b)\,x-(5a+2b)}{(x-2)\,(x-5)}.$$

Or on note qu'il suffit de vérifier le système suivant pour que la dernière assertion soit vraie :

$$\begin{cases}a+b=0\\-(5a+2b)=\frac{1}{3}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}b=-a\\5a-2a=3a=-\frac{1}{3}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}b=\frac{1}{9}\\a=-\frac{1}{9}.\end{cases}$$

On retrouve que

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\frac{1/9}{x-5}-\frac{1/9}{x-2}.$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\forall x\in I,\quad F(x)=\frac{1}{9}\ln(|x-5|)-\frac{1}{9}\ln(|x-1|)=\frac{1}{9}\ln(5-x)-\frac{1}{9}\ln(1-x)\qquad\text{car } x>0.$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f sur $I=\mathbb{R}_-^*$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{rl}\mathbb{R}_-^*&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto\frac{1}{9}\ln\left(\frac{5-x}{2-x}\right)+C\end{array}\,\middle|\,C\in\mathbb{R}\right\}}.$$

4.2 La fonction f est continue sur $I=]-2\,;\,+\infty[$ donc $\boxed{\text{admet des primitives sur } I}$. En effectuant la division euclidienne de X^3 par $X+2$, on note que

$$X^3=(X+2)\left(X^2-2X+4\right)-8.$$

D'où,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)-8}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}.$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{rl}]-2\,;\,+\infty[&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln(x+2)+C\end{array}\,\middle|\,C\in\mathbb{R}\right\}}.$$

4.3 Soit Δ le discriminant de x^2+x+4. Calculons $\Delta = 1-16<0$. Donc la fonction f est définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\text{admet des primitives sur } \mathbb{R}}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+4} &= \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+4} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+4} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+4} + \frac{3}{2}\times\frac{4}{15}\frac{1}{1+\frac{4}{15}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, une primitive de f est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+x+4\right|\right) + \frac{2}{5}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+4\right) + \frac{\sqrt{15}}{5}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4.4 Pour tout $x>0$, on a $x^3+3x^2+2x > 0+3\times 0+2\times 0 = 0$. Donc la fonction f est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\text{admet donc des primitives sur } I}$. De plus, on a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{x\left(x^2+3x+2\right)} = \frac{1}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0\}, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

Méthode 1. On a

$$a = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} xf(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}$$

De même,

$$b = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} (x+1)f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{1}{x(x+2)} = -1.$$

Enfin,

$$c = \lim_{\substack{x\to -2\\ x\neq -2}} (x+2)f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ x\neq -2}} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2}$$

Méthode 2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{a\left(x^2+3x+2\right)+b\left(x^2+2x\right)+C\left(x^2+x\right)}{x(x+1)(x+2)} \\ \Leftrightarrow \quad &\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{(a+b+c)x^2+(3a+2b+c)x+2a}{x(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Or on note qu'il suffit de vérifier le système suivant pour que la dernière assertion soit vraie :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \qquad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-\frac{1}{2}-b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on retrouve que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2}$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \frac{1}{2}\ln(|x|) - \ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+2|) = \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) \qquad \text{car } x > 0.$$

Donc l'ensemble des primitives de f sur $I = \mathbb{R}_+^*$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) + C \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4.5 Soit Δ le discriminant de $x^2 - 2x + 4$. On a $\Delta = 4 - 16 < 0$. Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{6x^2-11x+24}{2(x^2-2x+4)}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{\text{admet des primitives sur } \mathbb{R}}$. Commençons par effectuer la division euclidienne de $6X^2 - 11X + 24$ par $X^2 - 2X + 4$. On a

$$6X^2 - 11X + 24 = 6\left(X^2 - 2X + 4\right) + X.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{6\left(x^2 - 2x + 4\right) + x}{2\left(x^2 - 2x + 4\right)} = \frac{6}{2} + \frac{x}{2\left(x^2 - 2x + 4\right)} = 3 + \frac{x}{2\left(x^2 - 2x + 4\right)}.$$

On note que $u : x \mapsto 2x^2 - 4x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u' : x \mapsto 4x - 4$. Or $x = \frac{1}{4}(4x-4) + 1$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 3 + \frac{1}{4}\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{2\left(x^2 - 2x + 4\right)}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2(x^2-2x+4)}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2 - 1 + 4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2 + 3} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Par conséquent une primitive de g est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{6} \times \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 3x + \frac{1}{4}\ln(|u(x)|) + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + \frac{1}{4}\ln\left(2x^2 - 4x + 4\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. **Savoir faire un changement de variable.**

5.1 La fonction $t \mapsto \sin(t)\cos^5(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons $u = \cos(t)$. $t \mapsto \cos(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Par conséquent,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^5(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^0 u^5\,(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^5\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^6}{6}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{1}{6}.}$$

5.2 Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $x^2 \leqslant 1$ et donc $1 - x^2$. Donc la fonction $f : x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$ est définie et même continue sur $[-1\,;\,1]$. Soient $x \in [-1\,;\,1]$ et

$$F(x) = \int_0^x t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $t = \cos(u)$ i.e. $u = \arccos(t)$. La fonction $u \mapsto \cos(u)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}t = -\sin(u)\,\mathrm{d}u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_0^x t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x)} \cos^2(u)\sqrt{1-\cos^2(u)}\,(-\sin(u))\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\sqrt{\sin^2(u)}\,\sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\sin^2(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{car } \sin(u) \geqslant 0 \text{ pour } u \in [0\,;\,\pi] \\
&= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin(2u)\right)^2\mathrm{d}u \\
&= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos(4u)}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u}{8} - \frac{\sin(4u)}{32}\right]_{u=\arccos(x)}^{u=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{\sin(2\pi)}{32} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{\sin(4\arccos(x))}{32} \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{2\sin(2\arccos(x))\cos(2\arccos(x))}{32} \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{4\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x))\left(2\cos^2(\arccos(x))-1\right)}{32} \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{\sqrt{1-x^2}\,x\left(2x^2-1\right)}{8}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des primitives de f sur $[-1\,;\,1]$ est donc donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl} [-1\,;\,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\pi + 2\sqrt{1-x^2}\left(2x^2-1\right)x - 2\arccos(x)}{8} + C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5.3 La fonction $t \mapsto \arctan(t)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc notamment sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,2\right]$ et donc $\boxed{I \text{ existe}}$. De plus en posant $u = \frac{1}{t}$, et donc $t = \frac{1}{u}$. La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ on a

$$\begin{aligned}
I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \arctan(t)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t &= \int_2^{\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(1+u^2\right)\frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u)\right)\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\mathrm{d}u \qquad \text{car } u > 0 \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{u^2} + 1\,\mathrm{d}u - I \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{u} + u\right]_{u=\frac{1}{2}}^{u=2} - I \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\right) - I \\
&= \frac{3\pi}{2} - I.
\end{aligned}$$

Donc $2I = \frac{3\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{3\pi}{4}.}$$

5.4 La fonction $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{admet des primitives sur } \mathbb{R}}$. Posons $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ i.e. $t = \ln(u)$. La fonction $u \mapsto \ln(u)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{u^2}{u+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}^x} 1 - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[u - \ln\left(|u+1|\right)\right]_{u=1}^{u=\mathrm{e}^x} \\ &= \mathrm{e}^x - \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 1 + \ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x - \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right) + C \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5.5 Pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et donc $1 + \cos(x) \geqslant 1 > 0$. Donc $x \mapsto \frac{1}{1+\cos(x)}$ est définie et même continue sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors $x = 2\arctan(t)$. La fonction $t \mapsto 2\arctan(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et par les formules de l'angle moitié, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 1.}$$