Correction de l'interrogation 11 d'entrainement
Equations différentielles d'ordre 2 et calcul dans $\mathbb{R}$

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $d_1 : I \to \mathbb{K}$ et $d_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et (E_1), (E_2) et (E) les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} (E_1) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) \\ (E_2) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x) \\ (E) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x). \end{array}$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et si y_2 est une solution de (E_2) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E).

1.2 Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $d : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors le problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) \ : \begin{cases} (E) \qquad \forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

1.3 Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A \text{ est majorée} & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad x \leqslant M \\ A \text{ est minorée} & \Leftrightarrow & \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad m \leqslant x \\ A \text{ est bornée} & \Leftrightarrow & \exists (M,m) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A, \quad m \leqslant x \leqslant M. \end{array}$$

1.4 Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :

$$A \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M.$$

1.5 Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{rclcl} m = \min(A) & \Leftrightarrow & m \in A & \text{et} & \forall x \in A, \quad m \leqslant x \\ M = \max(A) & \Leftrightarrow & M \in A & \text{et} & \forall x \in A, \quad x \leqslant M. \end{array}$$

1.6 Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\sup(A) = \min\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A\}$$
$$\inf(A) = \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A\}.$$

2. **Manipuler la valeur absolue dans des inéquations.**

2.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E) : |2x-4| \leqslant |x-1|$. On note que

$$2x - 4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 2 \qquad \text{et} \qquad x - 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 1.$$

Premier cas, $x \leqslant 1$. Alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 2x \leqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leqslant x$$

ce qui est impossible car $x \leqslant 1$. Donc l'ensemble solution dans ce cas est $\mathscr{S}_1 = \emptyset$.
Deuxième cas, $1 \leqslant x \leqslant 2$. Alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 2x \leqslant x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leqslant 3x \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{5}{3} < \frac{6}{3} = 2.$$

Donc l'ensemble solution dans ce cas est $\mathscr{S}_2 = \left[\frac{5}{3}; 2\right]$.
Troisième cas, $x \geqslant 2$. Alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 4 \leqslant x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3.$$

Donc l'ensemble solution dans ce cas est $\mathscr{S}_3 = [2; 3]$.
Conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \left[\frac{5}{3}; 3\right].}$$

2.2 Soient $x \in \mathbb{R}$ et (E) : $\ln(|x-1|) - 2\ln(|x|) + \ln(|x+1|) < 1$. L'équation (E) a un sens si et seulement si

$$(x - 1 \neq 0 \quad \text{ET} \quad x \neq 0 \quad \text{ET} \quad x + 1 \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$. On a

$$\begin{aligned}
(E) \quad & \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{|x-1|\,|x+1|}{|x|^2}\right) < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2}\right) < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\left|x^2-1\right|}{x^2} < \mathrm{e} \qquad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
& \Leftrightarrow \quad \left|x^2-1\right| < \mathrm{e}\, x^2 \qquad \text{car } x^2 > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad -\mathrm{e}\, x^2 < x^2 - 1 < \mathrm{e}\, x^2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\mathrm{e}+1)\, x^2 > 1 \\ (\mathrm{e}-1)\, x^2 > -1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > \frac{1}{\mathrm{e}+1} \\ \\ x^2 > \underbrace{\dfrac{-1}{\mathrm{e}-1}}_{<0} \text{ toujours vrai} \end{cases} \qquad \text{car } \mathrm{e}+1 > \mathrm{e}-1 > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 > \frac{1}{\mathrm{e}+1} \\
& \Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}+1}} \quad \text{OU} \quad x > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}+1}}.
\end{aligned}$$

On note que $-1 < -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}+1}} < 0 < -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}+1}} < 1$ Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty; -1[\cup \left]-1; -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}+1}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}+1}}; 1\right[\cup]1; +\infty[\,.}$$

2.3 Soit $x \in \mathbb{R}$ et (E) : $\sqrt{|x^2-1|} \leqslant x - 5$. On a $\left|x^2-1\right| \geqslant 0$ donc (E) est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Premier cas, si $x < 5$, alors $x - 5 < 0 \leqslant \sqrt{|x^2-1|}$. Donc (E) n'a pas de solution strictement inférieure à 5.
Second cas, si $x \geqslant 5$. Alors,

$$\begin{aligned}
(E) \quad & \Leftrightarrow \quad \left|x^2-1\right| \leqslant (x-5)^2 \qquad \text{car } \left|x^2-1\right| \geqslant 0 \text{ et } x - 5 \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad -(x-5)^2 \leqslant x^2 - 1 \leqslant (x-5)^2 \\
& \Leftrightarrow \quad -x^2 + 10x - 25 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2 - 10x + 25 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 10x + 24 \geqslant 0 \\ 10x \leqslant 26 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 12 \geqslant 0 \\ x \leqslant \frac{13}{5} < \frac{25}{5} = 5 \text{ impossible.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$$

2.4 Soit $x \in \mathbb{R}$ et (E) : $|2x-3|+|3-x|-|x-7| \leqslant 2$. On note que

$$2x-3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 3-x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x-7 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 7.$$

Premier cas, si $x \leqslant \frac{3}{2}$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 3-2x+3-x+x-7 \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leqslant x.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathscr{S}_1 = \left[-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right]$.
Deuxième cas, si $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3+3-x+x-7 \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{9}{2} \text{toujours vrai car } x \leqslant 3 = \frac{6}{2}.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathscr{S}_2 = \left[\frac{3}{2}\,;\,3\right]$.
Troisième cas, si $3 \leqslant x \leqslant 7$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3+x-3+x-7 \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \leqslant 15 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{15}{4}.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathscr{S}_3 = \left[3\,;\,\frac{15}{4}\right]$.
Quatrième cas, si $x \geqslant 7$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3+x-3-x+7 \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{impossible car } x \geqslant 7.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathscr{S}_4 = \emptyset$.
Conclusion l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 \cup \mathscr{S}_4 = \left[-\frac{3}{2}\,;\,\frac{15}{4}\right].}$$

2.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left|x^2-8x+11\right| \leqslant 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 \leqslant x^2-8x+11 \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-8x+15 \geqslant 0 \\ x^2-8x+7 \leqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit Δ_1 le discriminant de $x^2-8x+15$. On a $\Delta_1 = 64-4\times 15 = 4\,(16-15) = 4$. Donc les racines associées sont

$$x_1 = \frac{8-2}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+2}{2} = 5.$$

Soit maintenant Δ_2 le discriminant de x^2-8x+7. On a $\Delta_2 = 64-4\times 7 = 4\,(16-7) = 4\times 9 = 36$. Donc les racines associées sont

$$x_3 = \frac{8-6}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{8+6}{2} = 7.$$

Par conséquent,

$$\left|x^2-8x+11\right| \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 3 \quad \text{OU } x \geqslant 5 \\ 1 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = [1\,;\,3] \cup [5\,;\,7].}$$

3. **Savoir déterminer les solutions d'une équation homogène d'ordre 2.**

3.1 Soit (E_c) : $r^2+2r-15=0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 4+60 = 64$. Donc les racines de (E_c) sont :

$$r_1 = \frac{-2+8}{2} = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-2-8}{2} = -5.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto C_1 \, \mathrm{e}^{3t} + C_2 \, \mathrm{e}^{-5t} \end{array} \middle| \, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = C_1 \, \mathrm{e}^{3t} + C_2 \, \mathrm{e}^{-5t} \\ y(0) = C_1 + C_2 = 8 \\ y'(0) = 3C_1 - 5C_2 = 8. \end{cases}$$

Or pour $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ 3C_1 - 5C_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 8 - C_1 \\ 3C_1 - 40 + 5C_1 = 8C_1 - 40 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 8 - C_1 \\ C_1 = \frac{48}{8} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = \frac{48}{8} = 6. \end{cases}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, donnée par

$$\boxed{y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 6 \, \mathrm{e}^{3t} + 2 \, \mathrm{e}^{-5t}. \end{array}}$$

3.2 Soit $(E_c) : r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 1 - 10 = -9$. Donc les racines de (E_c) sont :

$$r_1 = \frac{-1 + 3i}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-1 - 3i}{2}.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \end{array} \middle| \, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \\ y(\pi) = -C_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \ \Leftrightarrow \ C_2 = 1 \\ y'(\pi) = \frac{7}{2} \, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists C_1 \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \\ y'(\pi) = -\frac{1}{2} \, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} (-1) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{3}{2} C_1 (-1) + 0 \right) = \frac{7}{2} \, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} C_1 = \frac{7}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists C_1 \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \\ C_1 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, donnée par

$$\boxed{y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right). \end{array}}$$

3.3 Soit $(E_c) : r^2 - 16r + 64 = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 16^2 - 4 \times 64 = 8^2 \times 4 - 4 \times 8^2 = 0$. Donc l'unique racine de (E_c) est :

$$r_0 = \frac{16}{2} = 8.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{8t}\left(C_1 t + C_2\right) \end{array} \middle| \, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \mathrm{e}^{8t}\left(C_1 t + C_2\right) \\ y(1) = \mathrm{e}^{8}\left(C_1 + C_2\right) = \mathrm{e}^2 \ \Leftrightarrow\ C_1 + C_2 = \mathrm{e}^{-6} \\ y'(1) = 8\,\mathrm{e}^{8}\left(C_1 + C_2\right) + C_1\,\mathrm{e}^{8} = \mathrm{e}^2 \ \Leftrightarrow\ 9C_1 + 8C_2 = \mathrm{e}^{-6}. \end{cases}$$

Or pour $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \mathrm{e}^{-6} \\ 9C_1 + 8C_2 = \mathrm{e}^{-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \mathrm{e}^{-6} - C_1 \\ 9C_1 + 8\,\mathrm{e}^{-6} - 8C_1 = \mathrm{e}^{-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \mathrm{e}^{-6} - C_1 \\ C_1 = -7\,\mathrm{e}^{-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \mathrm{e}^{-6} + 7\,\mathrm{e}^{-6} = 8\,\mathrm{e}^{-6} \\ C_1 = -7\,\mathrm{e}^{-6} \end{cases}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, donnée par

$$\boxed{y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (-7t + 8)\,\mathrm{e}^{8t-6}. \end{array}}$$

3.4 Soit $(E_c) : r^2 - 3r + (3 - i) = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i$. Soit $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2iab = -3 + 4i \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \quad \text{car } ab \geqslant 0. \end{aligned}$$

Posons $\delta = 1 + 2i$. Alors les racines de (E_c) sont :

$$r_1 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3 - 1 - 2i}{2} = 1 - i.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{(2+i)t} + C_2\,\mathrm{e}^{(1-i)t} \end{array} \middle| \, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{(2+i)t} + C_2\,\mathrm{e}^{(1-i)t} \\ y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = (2 + i)\,C_1 + (1 - i)\,C_2 = 1 + 2i. \end{cases}$$

Or pour $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ (2+i)\,C_1 + (1-i)\,C_2 = 1+2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ (2+i)\,C_1 + 1 - i - (1-i)\,C_1 = 1+2i \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ (1+2i)\,C_1 = 3i \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ C_1 = \frac{3i}{1+2i} = \frac{3i(1-2i)}{1+4} = \frac{6+3i}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - \frac{6+3i}{5} = \frac{-1-3i}{5} \\ C_1 = \frac{6+3i}{5} \end{cases}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, donnée par

$$\boxed{y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{6+3i}{5}\,\mathrm{e}^{(1-i)t} - \dfrac{1+3i}{5}\,\mathrm{e}^{(2+i)t} \end{array}.}$$

3.5 Soit (E_c) : $r^2 + (1+i)\,r + i = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = (1+i)^2 - 4i = 1 + 2i - 1 - 4i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$.
NB : si vous n'avez pas vu directement la factorisation surtout ne poser pas $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$ car on connait la forme trigonométrique de $-2i = 2\,\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}}$ dont les racines sont $\pm\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}$. On retrouve alors $1-i$ et $-1+i$ en développant.
Les racines de (E_c) sont donc

$$r_1 = \frac{-1-i+1-i}{2} = -i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1-i-1+i}{2} = -1.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{-it} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{array} \middle| \, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-it} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = C_1 + C_2 = 2 \\ y'(0) = -iC_1 - C_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ C_2 = -iC_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-it} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = C_1 - iC_1 = 2 \ \Leftrightarrow\ C_1 = \frac{2}{1-i} = 1+i \\ C_2 = -i\,(1+i) = 1-i \end{cases}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, donnée par

$$\boxed{y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (1+i)\,\mathrm{e}^{-it} + (1-i)\,\mathrm{e}^{-t} \end{array}.}$$

4. **Savoir déterminer une solution particulière.**

4.1 Soit (E_c) : $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$ l'équation caractéristique associée à (E). L'unique racine double de (E_c) est donc $r_0 = -2$ et non 2 ! On pose en conséquence $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = (at + b)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_p'(t) = (a + 2at + 2b)\,\mathrm{e}^{2t} = (2at + 2b + a)\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$y_p''(t) = (2a + 4at + 4b + 2a)\,\mathrm{e}^{2t} = (4at + 4b + 4a)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& y_p \text{ est solution de } (E)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall t\in\mathbb{R},\quad (4at+4b+4a)\,\mathrm{e}^{2t}+4\,(2at+2b+a)\,\mathrm{e}^{2t}+4\,(at+b)\,\mathrm{e}^{2t}=(t+1)\,\mathrm{e}^{2t}\\
\Leftrightarrow\quad & \forall t\in\mathbb{R},\quad (4a+8a+4a)\,t+4b+4a+8b+4a+4b=t+1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{2t}\neq 0\\
\Leftrightarrow\quad & \forall t\in\mathbb{R},\quad 16at+16b+8a=t+1.
\end{aligned}$$

On note que la dernière assertion est vrai si

$$\begin{cases}16a=1\\ 16b+8a=1\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{cases}a=\frac{1}{16}\\ b=\frac{1-8a}{16}=\frac{1-\frac{1}{2}}{16}=\frac{1}{32}.\end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{y_p:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \dfrac{2t+1}{32}\,\mathrm{e}^{2t}\end{array}\text{ est une solution de } (E)\,.}$$

4.2 Soit $(E_c): r^2+r-2=0$ l'équation caractéristique associée à (E) et Δ son discriminant. On a $\Delta=1+8=9$ donc les racines de (E_c) sont

$$r_1=\frac{-1+3}{2}=1\qquad\text{et}\qquad r_2=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

Puisque 1 est une racine simple de (E_c), on pose $a\in\mathbb{R}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y_p(t)=at\,\mathrm{e}^{t}\,.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
y_p'(t)&=a\,(t+1)\,\mathrm{e}^{t}\\
y_p''(t)&=a\,(t+1+1)\,\mathrm{e}^{t}=a\,(t+2)\,\mathrm{e}^{t}\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E)\quad&\Leftrightarrow\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad a\,(t+2)\,\mathrm{e}^{t}+a\,(t+1)\,\mathrm{e}^{t}-2at\,\mathrm{e}^{t}=9\,\mathrm{e}^{t}\\
&\Leftrightarrow\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad a\,(2t-2t+2+1)=9 \qquad\text{car } \mathrm{e}^{t}\neq 0\\
&\Leftrightarrow\quad 3a=9.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y_p:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto 3t\,\mathrm{e}^{t}\end{array}\text{ est une solution de } (E)\,.}$$

4.3 *Puisque le second membre est polynomiale, il est inutile de cherche les solutions de l'équation caractéristique.* Soient $(a_3,a_2,a_1,a_0)\in\mathbb{R}^4$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y_p(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
y_p'(t)&=3a_3t^2+2a_2t+a_1\\
y_p''(t)&=6a_3t+2a_2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& y_p \text{ est solution de } (E)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall t\in\mathbb{R},\quad 6a_3t+2a_2-3\left(3a_3t^2+2a_2t+a_1\right)+2\left(a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0\right)=4t^3-6t+4\\
\Leftrightarrow\quad & \forall t\in\mathbb{R},\quad 2a_3t^3+(2a_2-9a_3)\,t^2+(2a_1-6a_2+6a_3)\,t+2a_0-3a_1+2a_2=4t^3-6t+4.
\end{aligned}$$

On note que pour la dernière assertion soit vraie, il suffit que

$$\begin{cases} 2a_3 = 4 \\ 2a_2 - 9a_3 = 0 \\ 2a_1 - 6a_2 + 6a_3 = -6 \\ 2a_0 - 3a_1 + 2a_2 = 4 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a_3 = 2 \\ a_2 = \frac{9a_3}{2} = 9 \\ a_1 = \frac{-6+6a_2-6a_3}{2} = \frac{-6+54-12}{2} = 18 \\ a_0 = \frac{4+3a_1-2a_2}{2} = \frac{4+54-18}{2} = 20. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 2t^3 + 9t^2 + 18t + 20 \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

4.4 Soit $(E_c) : r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$ l'équation caractéristique associée à (E). Puisque 2 est une racine double de (E_c), on pose $a \in \mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = at^2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= a\left(2t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^{2t} \\ y_p''(t) &= a\left(4t^2 + 4t + 4t + 2\right)\mathrm{e}^{t} = a\left(4t^2 + 8t + 2\right)\mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\left(4t^2 + 8t + 2\right)\mathrm{e}^{2t} - 4a\left(2t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^{2t} + 4at^2\,\mathrm{e}^{2t} = 5\,\mathrm{e}^{2t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\left(4t^2 + 8t + 2 - 8t^2 - 8t + 4t^2\right) = 5 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{2t} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2a = 5. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{5t^2}{2}\,\mathrm{e}^{2t} \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

4.5 Soit $(E_c) : r^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 = -4 \;\Leftrightarrow\; r = \pm 2i$ l'équation caractéristique associée à (E). On considère l'équation

$$(F) \qquad \forall t \in I, \quad y''(t) + 4y(t) = (1+t)\,\mathrm{e}^{2it}.$$

Puisque $2i$ est une racine simple de (E_c). On pose $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_p(t) = t\,(at+b)\,\mathrm{e}^{2it} = \left(at^2 + bt\right)\mathrm{e}^{2it}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z_p'(t) &= \left(2iat^2 + 2ibt + 2at + b\right)\mathrm{e}^{2it} = \left(2iat^2 + 2\,(a+ib)\,t + b\right)\mathrm{e}^{2it} \\ z_p''(t) &= \left(-4at^2 + 4i\,(a+ib)\,t + 2ib + 4iat + 2\,(a+ib)\right)\mathrm{e}^{2it} = \left(-4at^2 + 4i\,(2a+ib)\,t + 2\,(a+2ib)\right)\mathrm{e}^{2it}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & z_p \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(-4at^2 + 4i\,(2a+ib)\,t + 2\,(a+2ib)\right)\mathrm{e}^{2it} + 4\left(at^2 + bt\right)\mathrm{e}^{2it} = (t+1)\,\mathrm{e}^{2it} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad -4at^2 + 4i\,(2a+ib)\,t + 2\,(a+2ib) + 4at^2 + 4bt = t+1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{2it} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad 8iat + 2a + 4ib = t + 1 \end{aligned}$$

On note alors que pour que la dernière assertion soit vraie, il suffit de vérifier

$$\begin{cases} 8ia = 1 \\ 2a + 4ib = 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a = -\frac{i}{8} \\ b = \frac{1-2a}{4i} = \frac{1+\frac{i}{4}}{4i} = \frac{4+i}{16i} = -\frac{4i-1}{16} = \frac{1-4i}{16}. \end{cases}$$

D'où,

$$z_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{-2it^2 + (1-4i)\,t}{16}\,\mathrm{e}^{2it} = \dfrac{-2it^2 + (1-4i)\,t}{16}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \end{array} \text{ est une solution de } (F).$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}\left(z_p(t)\right) = \frac{1}{16}\left(2t^2 \sin\left(2t\right) + t\cos\left(2t\right) + 4t\sin\left(2t\right)\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{y_p = \mathrm{Re}\left(z_p\right)\ :\ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{2t^2 \sin\left(2t\right) + t\cos\left(2t\right) + 4t\sin\left(2t\right)}{16} \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

5. **Calculs d'équivalents.**

5.1 On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$ donc $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ par élévation au carré, $\mathrm{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. De plus,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Donc $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. On observe alors que

$$3x^5 \underset{x\to 0}{\ll} \mathrm{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{\ll} \mathrm{e}^x - 1$$

Donc

$$3x^5 - \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Posons $u(x) = 3x^5 - \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{e}^x - 1$. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or $\sin\left(u\right) \underset{u\to 0}{\sim} u$ (car $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$), donc

$$f(x) = \sin\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.}$$

5.2 On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin\left(\mathrm{e}^x\right) \leqslant 1$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{\sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Or $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par encadrement,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Autrement dit : $\sin\left(\mathrm{e}^{2x}\right) \underset{x\to +\infty}{\ll} \mathrm{e}^x$. De plus,

$$x^{\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x)\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln^2(x)}.$$

Donc

$$\frac{x^{\ln(x)}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{\ln^2(x) - x} = \mathrm{e}^{-x\left(1 - \frac{\ln^2(x)}{x}\right)}.$$

Par croissance comparée, $\frac{\ln^2(x)}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$. donc $-x\left(1 - \frac{\ln^2(x)}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et ainsi,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x\left(1 - \frac{\ln^2(x)}{x}\right)} = 0.$$

D'où, $x^{\ln(x)} \underset{x\to +\infty}{\ll} \mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$f(x) = \sin\left(\mathrm{e}^{2x}\right) + x^{\ln(x)} + 5\,\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{ch}(x) = \sin\left(\mathrm{e}^{2x}\right) + x^{\ln(x)} + \frac{13}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{13}{2}\,\mathrm{e}^x.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{13}{2}\,\mathrm{e}^x.}$$

5.3 On note que

$$\mathrm{e}^{x^2+5x+3+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{x^2+5x+3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

De plus, $\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\mathrm{e}^{\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x^2+5x+3}.}$$

Il est très important de noter qu'il est impossible de simplifier plus le résultat. Notamment affirmer $x^2+5x+3 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ implique $\mathrm{e}^{x^2+5x+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x^2}$ est FAUX ! ! En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2+5x+3}}{\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{5x+3} = +\infty.$$

5.4 On remarque que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x+x^5} + \frac{\sin(x)}{5} + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\tan(x)}{3} + \frac{\mathrm{e}^x}{2} = 0+0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} = 1.$$

Donc par composition,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{4}.}$$

5.5 On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(u)}{u} = 1$. Donc $\arcsin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Posons $u(x) = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc par composition, $\arcsin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. D'autre part et de même, on a $\tan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, avec $u = x^3 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\tan\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$. Enfin, $x\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \times 1 = x$. Donc on en déduit que

$$\tan^3(x) \underset{x\to 0}{\ll} \arcsin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\ll} x\cos(x).$$

Dès lors,

$$\arcsin\left(x^2\right) + \tan^3(x) + x\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Par élévation à la puissance 5, on conclut que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^5.}$$

5.6 On note que

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) + \mathrm{e}^{-x} + \frac{5}{x} = \frac{\pi}{2} + 0.$$

Donc

$$\arctan(x) + \mathrm{e}^{-x} + \frac{5}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

Par croissance comparée, on a

$$\ln^7(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2.$$

De plus,

$$x^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Donc $x^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2$. Ainsi,

$$x^2 + \ln^7(x) + x^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2.$$

Par quotient, on obtient que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} = \frac{\pi}{2x^2}.}$$