Interrogation 12 d'entrainement
Calculs dans R et matriciels

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Donner la définition de la borne inférieure, supérieure d'une partie.
   1.2 Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
   1.3 Donner la définition d'un intervalle.
   1.4 Définir la partie entière.
   1.5 Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   1.6 Donner la caractérisation de l'inversibilité (et non la définition : cf théorème II.4)
   1.7 Enoncer la formule de Bernoulli et du binôme de Newton pour deux matrices.
   1.8 Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.

   Révisions

   1.9 Tracer le graphe de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique /arccosinus / arcsinus / arctan, y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
   1.10 Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
   1.11 Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan.
   1.12 Enoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.

2. **Ecrire une matrice. Calcul matriciel élémentaire.** Sans justification, écrire la matrice et effectuer le calcul demandé.

   2.1 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $a_{12}=a_{23}=1$, $a_{13}=0$, pour tout $i\in[\![1\,;3]\!]$, $a_{ii}=0$ et pour tout $(i,j)\in[\![1\,;3]\!]^2$, $a_{ji}=a_{ij}$. Ecrire A et calculer A^2.

   2.2 Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\1\leqslant j\leqslant 3}}\in\mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j)\in[\![1\,;4]\!]\times[\![1\,;3]\!]$, $a_{ij}=3(i-1)+j$. Ecrire A et calculer A^T.

   2.3 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i\in[\![1\,;4]\!]$, $a_{ii}=0$ et pour tout $(i,j)\in[\![1\,;4]\!]^2$, $i\neq j$, $a_{ij}=ij$. On pose $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Ecrire A et calculer AB.

   2.4 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j)\in[\![1\,;4]\!]^2$, $a_{ij}=(-1)^{i+j}j$. On pose $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$. Ecrire A et calculer BA.

   2.5 Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 4}}\in\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $j\in[\![1\,;4]\!]$, $a_{1j}=j$ et pour tout $(i,j)\in[\![2\,;3]\!]\times[\![1\,;4]\!]$, $a_{ij}=2a_{i-1,j}$. Ecrire A et calculer A^T.

   2.6 Soit $A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant 3}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que pour tout $(k,l)\in[\![1\,;3]\!]^2$, $a_{kl}=i^{k+l}$, *le i complexe !* On pose $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$. Ecrire A et calculer AB.

   2.7 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j)\in[\![1\,;4]\!]^2$, $a_{ij}=\min(i,j)$. On pose $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Ecrire A et calculer calculer AB.

2.8 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,2]\!]^2$, $a_{ij} = 0$ si $i = j$ et $a_{ij} = 1$ sinon. Ecrire A et calculer A^3.

2.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(k,l) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, $a_{kl} = \omega^{k-1}$ si $k = l$ et $a_{kl} = 0$ sinon. Ecrire A et calculer A^n.

2.10 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\1\leqslant j\leqslant 3}} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $j \in [\![1\,;\,3]\!]$, $a_{1j} = 5j$ et $a_{2j} = a_{1j} - 1$. On pose $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecrire A et calculer AB.

3. **Savoir manipuler la racine carrée dans des inéquations.**
   3.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} \geqslant 1$.
   3.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x - 1 \leqslant \sqrt{x+2}$.
   3.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+2} \leqslant \sqrt{x+1} + 1$.
   3.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} \geqslant 3$.
   3.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2+5x+3} < x + 2$.
4. **Savoir donner la borne supérieure/inférieure.**
   4.1 Soit $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leqslant 1 \,\}$. Déterminer sa borne inférieure, sa borne supérieure, son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.
   4.2 Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^4 > 1 \right\}$. Déterminer sa borne inférieure, sa borne supérieure, son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.
   4.3 Soit $A = \left\{ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$. Déterminer sa borne inférieure, sa borne supérieure, son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.
   4.4 Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{\, -x \mid x \in A \,\}$. Justifier que A admet une borne inférieure, que B admet une borne supérieure et montrer que $\sup(B) \leqslant -\inf(A)$.
   4.5 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leqslant y$. Justifier que A admet une borne supérieure, que B admet une borne inférieure et montrer que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
5. **Résoudre une équation différentielle d'ordre 2.**
   5.1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.
   5.2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 4y' + 3y = 3x - 5 + 2x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
   5.3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 4y' + 4y = 2x\,\mathrm{e}^{2x}$.
   5.4 Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $(E) : y''y - (y')^2 + 2yy' + 2y^2\ln(y) = 0$. *Indication : poser* $z = \ln(y)$.
   5.5 Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation $(E) : \left(1-x^2\right)y'' - \left(4\sqrt{1-x^2} + x\right)y' + 3y = 0$. *Indication : poser* $x = \sin(t)$.
   5.6 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E) : 4xy'' + (2 - 8\sqrt{x})\,y' + 4y = 2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$. *Indication : poser* $t = \sqrt{x}$.