

## Correction de l'interrogation 12 d'entraînement Calculs dans $\mathbb{R}$ et matriciels

### 1. Restituer le cours.

1.1 Soient  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} a = \inf(A) &\Leftrightarrow a = \max \{ m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A \} \\ b = \sup(A) &\Leftrightarrow b = \min \{ M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A \}. \end{aligned}$$

1.2 Soit  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

Si  $A$  est non vide et minorée alors  $A$  admet une borne inférieure.

Si  $A$  est non vide et majorée alors  $A$  admet une borne supérieure.

1.3 Soit  $I \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . On dit que  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  si et seulement si

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad [a; b] \subseteq I.$$

1.4 Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  il existe un unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n + 1$ . Cet entier  $n$  est appelé partie entière de  $x$  :  $n = \lfloor x \rfloor$ .

1.5 L'ensemble  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists r \in \mathbb{Q}, \quad x < r < y.$$

De même l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x < \alpha < y.$$

1.6 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i.  $A$  est inversible
- ii.  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$
- iii.  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$

De plus dans chacun des cas,  $B = A^{-1}$ .

1.7 Soient  $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}$  et  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . On suppose que  $A$  et  $B$  commutent i.e.  $AB = BA$  alors,

- i.  $(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$ .
- ii. Si  $m \neq 0$ ,  $A^m - B^m = (A - B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$ .

1.8 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Si  $A$  et  $B$  sont inversibles alors  $AB$  est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

### 2. Ecrire une matrice. Calcul matriciel élémentaire. Dans chaque cas, on obtient :

$$2.1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$2.3 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -8 \\ 3 & -6 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.4 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.5 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 12 & 16 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 12 & 16 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$2.6 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix} \text{ et } AB = \begin{pmatrix} -i & -2i & -3i & -4i \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 2i & 3i & 4i \end{pmatrix}.$$

$$2.7 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.8 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = A.$$

$$2.9 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{(n-1)n} \end{pmatrix} = I_n \text{ car } \omega \in \mathbb{U}_n.$$

$$2.10 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix} \text{ et } AB = \begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 6 & 21 \end{pmatrix}.$$

### 3. Savoir manipuler la racine carrée dans des inéquations.

3.1 Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(E) : \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} \geq 1$ . On a  $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ . Soit maintenant  $x \geq 4$ . On a alors

$$\begin{aligned} x - 4\sqrt{x-4} \geq 0 & \Leftrightarrow x \geq 4\sqrt{x-4} & \Leftrightarrow x^2 \geq 16(x-4) & \text{car } x \geq 4 \\ & & \Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 \geq 0 \\ & & \Leftrightarrow (x-8)^2 \geq 0 \text{ toujours vrai.} \end{aligned}$$

Donc pour tout  $x \geq 4$ ,  $(E)$  est bien définie. Soit  $x \geq 4$ . On a

$$\begin{aligned} (E) & \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x-4} \geq 1 & \text{car } x - 4\sqrt{x-4} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x - 1 \geq 4\sqrt{x-4} \\ & \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 16(x-4) & \text{car } x-1 \geq 0 \text{ car } x \geq 4 \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 16x + 64 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 - 18x + 65 \geq 0. \end{aligned}$$

Soit  $\Delta$  le discriminant associé. On a

$$\Delta = 4 \times 9^2 - 4 \times 65 = 4(81 - 65) = 4(16) = 8^2$$

Donc les racines associées sont  $x_1 = \frac{18-8}{2} = 5$  et  $x_2 = \frac{18+8}{2} = 13$ . Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = [4; 5] \cup [13; +\infty[.$$

3.2 Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(E) : x - 1 \leq \sqrt{x+2}$ . L'équation  $(E)$  est bien définie si et seulement si  $x \geq -2$ . Soit  $x \geq -2$ .

Premier cas,  $x \leq 1$ , alors  $x - 1 \leq 0 \leq \sqrt{x+2}$  et  $(E)$  est donc vraie et l'ensemble solution dans ce cas est  $\mathcal{S}_1 = [-2; 1]$ .

Second cas,  $1 \leq x$ , alors

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq x+2 && \text{car } x-1 \geq 0 \text{ et } x+2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x+2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Soit  $\Delta$  le discriminant associé. On a  $\Delta = 9 + 4 = 13$ . Donc les racines associées sont  $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$  et  $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ . Or  $9 < 13 < 16$  donc  $3 < \sqrt{13} < 4$ . Donc

$$-\frac{1}{2} < x_1 < 0 \quad \text{et} \quad 3 < x_2 < \frac{7}{2}.$$

Par conséquent dans ce cas, l'ensemble solution est  $\mathcal{S}_2 = [1; x_2]$ .

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-2; x_2] = \left[-2; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right].$$

3.3 Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(E) : \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+1} + 1$ . L'équation est bien définie si et seulement si  $x \geq -2$  et  $x \geq -1$  i.e. si et seulement si  $x \geq -1$ . Soit maintenant  $x \geq -1$ . On a

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x+2 \leq x+1+2\sqrt{x+1}+1 && \text{car } x+1 \geq 0 \text{ et } x+2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{x+1} \text{ ce qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$

Conclusion l'ensemble solution est donné par

$$\mathcal{S} = [-1; +\infty[.$$

3.4 Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(E) : \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} \geq 3$ . L'équation est bien définie si et seulement si  $x^2 \geq 1$  et  $x^2 \geq 2$  i.e. si et seulement si  $x^2 \geq 2$  ou encore si et seulement si  $x \in ]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$ . Posons  $U = ]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$  et soit maintenant  $x \in U$ . On a

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} \geq 3 - \sqrt{x^2-2}.$$

Premier cas,  $3 - \sqrt{x^2-2} \leq 0$  alors  $(E)$  est vraie. Or pour  $x \in U$ ,

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{x^2-2} \leq 0 &\Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{x^2-2} &\Leftrightarrow 9 \leq x^2-2 && \text{car } x^2-2 \geq 0 \\ &&&& \Leftrightarrow x^2 \geq 11. \end{aligned}$$

Donc  $(E)$  est vraie sur  $U_1 = ]-\infty; -\sqrt{11}] \cup [\sqrt{11}; +\infty[$ .

Second cas,  $x \in U_2 = U \cap ]-\sqrt{11}; \sqrt{11}[ = ]-\sqrt{11}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{11}[$ . Alors,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} \geq 3 - \sqrt{x^2-2} \\ &\Leftrightarrow x^2-1 \geq 9 - 6\sqrt{x^2-2} + x^2-2 && \text{car } x^2-1 \geq 0 \text{ et } 3 - \sqrt{x^2-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-2} \geq 8 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2} \geq \frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow x^2-2 \geq \frac{16}{9} && \text{car } x^2-2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{34}{9} \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{34}}{3} \quad \text{OU} \quad x \geq \frac{\sqrt{34}}{3}. \end{aligned}$$

Or  $2 < \frac{34}{9} < 11$  et donc  $\sqrt{2} < \frac{\sqrt{34}}{3} < \sqrt{11}$ . Donc dans ce cas,  $(E)$  est vraie sur  $]-\sqrt{11}; -\frac{\sqrt{34}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{34}}{3}; \sqrt{11}[$ . En prenant l'union des deux ensembles trouvés, on conclut que l'ensemble solution est donné par

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{34}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{34}}{3}; +\infty\right[.$$

3.5 Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(E) : \sqrt{x^2 + 5x + 3} < x + 2$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de  $x^2 + 5x + 3$ . On a  $\Delta = 25 - 12 = 13$ . Donc les racines associées sont

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}.$$

Donc l'équation  $(E)$  est bien définie si et seulement si  $x \leq x_1$  ou  $x \geq x_2$ . Soit maintenant  $x \in ]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ . On note que  $3 < \sqrt{13} < 4$ , donc  $-4 < x_1 < -\frac{9}{2} < -3$  et  $-1 < x_2 < -\frac{1}{2}$ .

*Premier cas*, si  $x \leq x_1$ , alors  $x < -2$  et donc  $x + 2 < 0 \leq \sqrt{x^2 + 5x + 3}$  donc  $(E)$  est impossible.

*Second cas*, si  $x \geq x_2 > -2$ . Alors,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 < (x + 2)^2 && \text{car } x^2 + 5x + 3 \geq 0 \text{ et } x + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 < x^2 + 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow x < 1. \end{aligned}$$

Or  $x_2 < 0 < 1$  donc l'ensemble solution dans ce cas est  $[x_2; 1[$ .

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \left[ \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; 1 \right[.$$

#### 4. Savoir donner la borne supérieure/inférieure.

4.1 Soit  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 1\}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x - 2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Par conséquent,

$$A = [1; 3].$$

Donc 1 est LE minimum de  $A$  et donc également sa borne inférieure et 3 est le maximum de  $A$  et donc sa borne supérieure. Conclusion,

$$\inf(A) = \min(A) = 1 \quad \text{et} \quad \sup(A) = \max(A) = 3.$$

4.2 Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x^4 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \quad (\text{car } x^2 \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \quad \text{OU} \quad x > 1.$$

Par conséquent,

$$A = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[.$$

L'ensemble  $A$  n'est donc ni majoré ni minoré et n'admet donc ni minimum ni maximum ni borne supérieure ni borne inférieure.

4.3 Soit  $A = \left\{ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ . On sait que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \sin(y) \leq 1$ . Notamment pour tout  $x > 0$ ,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Ainsi,  $-1$  est UN minorant de  $A$  et  $1$  est UN majorant de  $A$ . Or le minorant  $-1$  est atteint : si  $x = \frac{2}{3\pi} > 0$ , alors

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Donc  $-1$  est LE minimum de  $A$ . De même pour  $x = \frac{2}{\pi} > 0$ , on a  $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  et donc  $1$  est LE maximum de  $A$ . Par suite, la borne inférieure de  $A$  est  $-1$  et sa borne supérieure est  $1$ . Conclusion,

$$\inf(A) = \min(A) = -1 \quad \text{et} \quad \sup(A) = \max(A) = 1.$$

4.4 Puisque  $A$  est non vide et minorée,  $A$  admet une borne inférieure. Donc pour tout  $x \in A$ ,  $\inf(A) \leq x$ . Soit  $y \in B$ . Alors il existe  $x \in A$  tel que  $y = -x$ . Donc  $y \leq -\inf(A)$ . Ainsi,

$$\forall y \in B, \quad y \leq -\inf(A).$$

Donc  $B$  est majorée par  $-\inf(A)$ . Or  $A$  est non vide donc il existe  $x \in A$ . Donc  $y = -x \in B$  et  $B$  est non vide. Ainsi  $B$  admet une borne supérieure qui est le plus petit des majorant. Or  $-\inf(A)$  est un majorant de  $B$ . Conclusion,

$$\sup(B) \leq -\inf(A).$$

4.5 Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$ . Puisque  $B$  est non vide il existe  $y \in B$ . Donc par hypothèse, pour tout  $x \in A, x \leq y$ . Donc  $y$  est un majorant de  $A$ . Donc  $A$  est un ensemble majoré et non vide de  $\mathbb{R}$  donc admet une borne supérieure. Comme  $y$  est un majorant de  $A$  et que la borne supérieure est le plus petit des majorants, on en déduit que

$$\sup(A) \leq y.$$

Le réel  $y$  étant un élément quelconque de  $B$ , on en déduit que pour tout  $y \in B, \sup(A) \leq y$ . Donc  $\sup(A)$  est un minorant de  $B$ . Or  $B$  est non vide donc  $B$  admet une borne inférieure.  $\inf(B)$  est le plus grand des minorants et  $\sup(A)$  est un minorant de  $B$ . Conclusion,

$$\boxed{\sup(A) \leq \inf(B)}.$$

## 5. Résoudre une équation différentielle d'ordre 2.

5.1 La fonction  $x \mapsto e^{-x} \cos(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $(E)$  admet des solutions sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(E_c)$  l'équation caractéristique associée :  $(E_c) : r^2 + 2r + 2 = 0$ . Soit  $\Delta$  le discriminant associé.  $\Delta = 4 - 8 = -4$ . Donc les racines sont complexes et conjuguées et données par

$$r_1 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i,$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$  est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x)) \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Considérons l'équation

$$(F) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, z''(x) + 2z'(x) + 2z(x) = e^{-x} e^{ix} = e^{(-1+i)x}$$

On note que  $-1 + i$  est une racine simple de  $(E_c)$ . Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Posons  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto a x e^{(-1+i)x}$ . La fonction  $z$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$z'(x) = a(1 + (-1 + i)x) e^{(-1+i)x}$$

et

$$z''(x) = a(-1 + i + (-1 + i)(1 + (-1 + i)x)) e^{(-1+i)x} = a(-2 + 2i - 2ix) e^{(-1+i)x}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & z \text{ est solution de } (F) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, a(-2 + 2i - 2ix) e^{(-1+i)x} + 2a(1 + (-1 + i)x) e^{(-1+i)x} + 2a e^{(-1+i)x} = e^{(-1+i)x} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, a(-2 + 2i - 2ix + 2 + 2(-1 + i)x + 2) = 1 \quad \text{car } e^{(-1+i)x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 2ia = 1 \\ \Leftrightarrow & a = -\frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Donc  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto -\frac{i}{2} x e^{(-1+i)x}$  est une solution de  $(F)$ . Donc  $y = \operatorname{Re}(z)$  est une solution de  $(E)$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$y(x) = \operatorname{Re} \left( -\frac{i}{2} x e^{(-1+i)x} \right) = \operatorname{Re} \left( -\frac{i}{2} x e^{-x} (\cos(x) + i \sin(x)) \right) = \frac{x \sin(x) e^{-x}}{2}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est donné par

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x \sin(x) e^{-x}}{2} + e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x)) \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

5.2 La fonction  $x \mapsto 3x - 5 + 2x^2 e^{-x}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $(E)$  admet des solutions sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(E_c)$  l'équation caractéristique associée :  $(E_c) : r^2 - 4r + 3 = 0$ . Soit  $\Delta$  le discriminant associé.  $\Delta = 16 - 12 = 4$ . Donc on a deux racines distinctes données par

$$r_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{4+2}{2} = 3,$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$  est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A e^x + B e^{3x} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Considérons les équations

$$\begin{aligned} (E_1) : \quad & \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) + 3y(x) = 3x - 5 \\ (E_2) : \quad & \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) + 3y(x) = 2x^2 e^{-x}. \end{aligned}$$

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ . La fonction  $y_1$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} & y_1 \text{ est solution de } (E_1) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, -4a + 3(ax + b) = 3x - 5 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, 3ax + 3b - 4a = 3x - 5. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b - 4a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-5+4a}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc  $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - \frac{1}{3}$  est une solution de  $(E_1)$ .

On note que  $-1$  n'est pas une solution de l'équation caractéristique donc on pose  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ . La fonction  $y_2$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= (2ax + b - ax^2 - bx - c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} \\ y_2''(x) &= (-2ax + 2a - b + ax^2 + (b - 2a)x + c - b)e^{-x} = (ax^2 + (b - 4a)x + 2a + c - 2b)e^{-x}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & y_2 \text{ est solution de } (E_2) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (ax^2 + (b - 4a)x + 2a + c - 2b)e^{-x} \\ & \quad - 4(-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} + 3(ax^2 + bx + c)e^{-x} = 2x^2 e^{-x} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + (b - 4a)x + 2a + c - 2b \\ & \quad + 4ax^2 + (4b - 8a)x + 4c - 4b + 3ax^2 + 3bx + 3c = 2x^2 \quad \text{car } e^{-x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, 8ax^2 + (8b - 12a)x + 2a - 6b + 8c = 2x^2. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 12a = 0 \\ 2a - 6b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{12a}{8} = \frac{3}{8} \\ c = \frac{6b-2a}{8} = \frac{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}}{8} = \frac{7}{32} \end{cases}$$

Ainsi,  $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{8x^2+12x+7}{32} e^{-x}$  est une solution de  $(E_2)$ . Donc par le principe de superposition,  $y_1 + y_2$  est une solution de  $(E)$ . Conclusion, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{1}{3} + \frac{8x^2+12x+7}{32} e^{-x} + A e^x + B e^{3x} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5.3 La fonction  $x \mapsto 2xe^{2x}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $(E)$  admet des solutions sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(E_c)$  l'équation caractéristique associée :  $(E_c) : r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)^2 = 0$ . 2 étant une racine double, on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$  :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ax + B)e^{2x} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2(a + b)e^{2x}$ . La fonction  $y$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} y'(x) &= (3ax^2 + 2bx + 2ax^3 + 2bx^2)e^{2x} = (2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + 2bx)e^{2x} \\ y''(x) &= (6ax^2 + (6a + 4b)x + 2b + 4ax^3 + (6a + 4b)x^2 + 4bx)e^{2x} \\ &= (4ax^3 + (12a + 4b)x^2 + (6a + 8b)x + 2b)e^{2x}. \end{aligned}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, (4ax^3 + (12a + 4b)x^2 + (6a + 8b)x + 2b)e^{2x} \\ &\quad - 4(2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + 2bx)e^{2x} + 4(ax^3 + bx^2)e^{2x} = 2xe^{2x} \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, 4ax^3 + (12a + 4b)x^2 + (6a + 8b)x + 2b \\ &\quad - 8ax^3 - (12a + 8b)x^2 - 8bx + 4ax^3 + 4bx^2 = 2x \quad \text{car } e^{2x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, 6ax + 2b = 2x \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre  $a = \frac{1}{3}$  et  $b = 0$ . Ainsi,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{3}e^{2x}$  est une solution de  $(E)$ .

Conclusion, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3}{3}e^{2x} + (Ax + B)e^{2x} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5.4 Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Posons pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z(t) = \ln(y(t))$ . Puisque  $y$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $z$  est bien définie et est même deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $y(t) = e^{z(t)}$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$y'(t) = z'(t)e^{z(t)} \quad \text{et} \quad y''(t) = z''(t)e^{z(t)} + (z'(t))^2e^{z(t)}.$$

Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow &\forall t \in \mathbb{R}, y''(t)y(t) - (y'(t))^2 + 2y(t)y'(t) + 2y^2(t)\ln(y(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall t \in \mathbb{R}, (z''(t)e^{z(t)} + (z'(t))^2e^{z(t)})e^{z(t)} - (z'(t)e^{z(t)})^2 + 2e^{z(t)}z'(t)e^{z(t)} + 2(e^{z(t)})^2\ln(e^{z(t)}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall t \in \mathbb{R}, z''(t)e^{2z(t)} + (z'(t))^2e^{2z(t)} - (z'(t))^2e^{2z(t)} + 2z'(t)e^{2z(t)} + 2e^{2z(t)}z(t) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, z''(t) + 2z'(t) + 2z(t) = 0 \quad \text{car } e^{2z(t)} \neq 0. \end{aligned}$$

Alors, d'après la question 5.1, on obtient que

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, z(t) = e^{-t}(A \cos(t) + B \sin(t)) \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(t) = e^{z(t)} = e^{e^{-t}(A \cos(t) + B \sin(t))}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \mapsto e^{e^{-t}(A \cos(t) + B \sin(t))} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5.5 Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $] -1; 1[$ . Posons pour tout  $t \in ] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $z(t) = y(\sin(t))$  i.e. pour tout  $x \in ] -1; 1[$ ,  $y(x) = z(\arcsin(x))$ . La fonction  $y$  est bien définie et même deux fois dérivable sur  $] -1; 1[$  et la fonction  $\sin$  est deux fois dérivable sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et vérifie  $\sin(] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) = ] -1; 1[$ . Donc la fonction  $z$  est bien définie et même deux fois dérivable sur  $] -1; 1[$ . De plus, pour tout  $x \in ] -1; 1[$ ,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) \\ y''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arcsin(x)) + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 z''(\arcsin(x)) \\ &= \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arcsin(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\arcsin(x)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow &\forall x \in ] -1; 1[, (1-x^2) y''(x) - (4\sqrt{1-x^2} - x) y'(x) + 3y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall x \in ] -1; 1[, (1-x^2) \left( \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arcsin(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\arcsin(x)) \right) \\ &\quad - (4\sqrt{1-x^2} - x) \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) \right) + 3z(\arcsin(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall x \in ] -1; 1[, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) + z''(\arcsin(x)) \\ &\quad - 4z'(\arcsin(x)) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) + 3z(\arcsin(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall x \in ] -1; 1[, z''(\arcsin(x)) - 4z'(\arcsin(x)) + 3z(\arcsin(x)) = 0. \end{aligned}$$

Posons pour tout  $x \in ] -1; 1[$ ,  $t = \arcsin(x)$  alors  $t \in ] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et

$$y \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in ] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ , z''(t) - 4z'(t) + 3z(t) = 0.$$

Donc par la question 5.2, on obtient

$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow &\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in ] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ , z(t) = A e^t + B e^{3t} \\ \Leftrightarrow &\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in ] -1; 1[, y(x) = z(\arcsin(x)) = A e^{\arcsin(x)} + B e^{3\arcsin(x)}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $] -1; 1[$  est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l|l} ] -1; 1[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto A e^{\arcsin(x)} + B e^{3\arcsin(x)} \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5.6 Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Posons pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $z(t) = y(t^2)$  i.e.  $y(x) = z(\sqrt{x})$ . Puisque  $y$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $z$  est aussi bien définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) \\ y''(x) &= -\frac{1}{4x^{3/2}} z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 4xy''(x) + (2 - 8\sqrt{x}) y'(x) + 4y(x) = 2\sqrt{x} e^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 4x \left( -\frac{1}{4x^{3/2}} z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x}) \right) + (2 - 8\sqrt{x}) \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) \right) + 4z(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} e^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -\frac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) - 4z'(\sqrt{x}) + 4z(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} e^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}_+^*, z''(\sqrt{x}) - 4z'(\sqrt{x}) + 4z(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} e^{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$



Posons pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t = \sqrt{x}$ . Alors,

$$y \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 2te^{2t}.$$

Donc par la question 5.3

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, z(t) = \frac{t^3}{3} e^{2t} + (At + B) e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = z(\sqrt{x}) = \frac{x^{3/2}}{3} e^{2\sqrt{x}} + (A\sqrt{x} + B) e^{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x^{3/2}}{3} e^{2\sqrt{x}} + (A\sqrt{x} + B) e^{2\sqrt{x}} \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$