

Correction de l'interrogation 14 d'entraînement Analyse Asymptotique

1. Restituer le cours.

1.1 Sur les équivalents, il est possible de

- multiplier,
- d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
- de passer à la valeur absolue,
- de faire un changement de variable.

Il est cependant interdit

- de sommer des équivalents,
- de composer des équivalents par une fonction,
- d'écrire équivalent à 0.

1.2 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et $(f, g, h) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^3$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x).$$

Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x).$$

1.3 Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

- i. f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Dans ce cas $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + o(1)$.
- ii. f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce case, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.
- iii. **SI** f est \mathcal{C}^n **ALORS** f admet un développement limité à l'ordre n .

1.4 Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n).$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $a_k = b_k$.

1.5 Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n), \quad (a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Soit F une primitive de f sur I alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

1.6 Soit $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Si f est de classe \mathcal{C}^n en a alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

1.7 Bande de naïfs !

2. Calculer un développement limité.

2.1 On sait que

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + (-1/2)(-3/2)\frac{x^2}{2} + (-1/2)(-3/2)(-5/2)\frac{x^3}{6} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48} + o(x^3). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{array}{r} x \\ -\frac{x^2}{2} \\ +\frac{3x^3}{8} \end{array} + o(x^3) \\ &\quad + \begin{array}{r} \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^3}{4} \end{array} + o(x^3) \\ &\quad + \begin{array}{r} \frac{x^3}{6} \end{array} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \left(\frac{9}{24} - \frac{6}{24} + \frac{4}{24} \right) x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{7x^3}{24} + o(x^3).}$$

NB : en anticipant l'ordre, nous aurions pu faire un développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ car tous ces termes seront ensuite multipliés par au moins x .

2.2 On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\operatorname{ch}(x) - \cos(x)) (\operatorname{sh}(x) - \sin(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right) \right] \\ &\quad \times \left[x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \right) \right] \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 + \frac{x^6}{360} + o(x^6) \right) \left(\frac{x^3}{3} + o(x^6) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{array}{r} \frac{x^5}{3} \\ + o(x^6) \end{array} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{3} + o(x^6). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{3} + o(x^6).}$$

2.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $u = \frac{1}{x}$ i.e. $x = \frac{1}{u}$ et $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = f(x)$. Alors

$$\forall u > 0, \quad g(u) = f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2+x} = \frac{e^{-u}}{2+\frac{1}{u}} = \frac{ue^{-u}}{1+2u}.$$

De plus $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Or on sait que $e^v \underset{v \rightarrow 0}{=} 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + \frac{v^4}{24} + o(v^4)$. Donc en prenant $v = -u \rightarrow 0$, on a

$$e^{-u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

D'autre part, on a $\frac{1}{1+v} \underset{v \rightarrow 0}{=} 1 - v + v^2 - v^3 + v^4 + o(v^4)$. Donc en prenant $v = 2u \rightarrow 0$, on a aussi

$$\frac{1}{1+2u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - 2u + 4u^2 - 8u^3 + 16u^4 + o(u^4).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(u) &\underset{u \rightarrow 0}{=} u \left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4) \right) (1 - 2u + 4u^2 - 8u^3 + 16u^4 + o(u^4)) \\ &\underset{u \rightarrow 0}{=} \left(u - u^2 + \frac{u^3}{2} - \frac{u^4}{6} + o(u^4) \right) (1 - 2u + 4u^2 - 8u^3 + 16u^4 + o(u^4)) \\ &\underset{u \rightarrow 0}{=} \begin{array}{cccc} u & -2u^2 & +4u^3 & -8u^4 \\ & -u^2 & +2u^3 & -4u^4 \\ & & +\frac{u^3}{2} & -u^4 \\ & & & -\frac{u^4}{6} \end{array} + o(u^4) \\ &\underset{u \rightarrow 0}{=} u - 3u^2 + \frac{13u^3}{2} - \frac{13 \times 6 + 1}{6} u^4 + o(u^4) \\ &\underset{u \rightarrow 0}{=} u - 3u^2 + \frac{13u^3}{2} - \frac{79}{6} u^4 + o(u^4). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{13}{2x^3} - \frac{79}{6x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

NB : ce n'est pas un vrai développement limité car les puissances de x sont négatives ici, on parle plutôt de développement asymptotique dans ce cas.

NB2 : En anticipant l'ordre nous aurions pu partir d'un développement limité à l'ordre 3 seulement de e^{-u} et de $\frac{1}{1+2u}$ car tous ces termes seront ensuite multipliés par u .

2.4 Posons $x = \frac{\pi}{4} + h$ i.e. $h = x - \frac{\pi}{4}$ et $g(h) = f(x) = f\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(h) &= f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = e^{\frac{\pi}{4}+h} \cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = e^{\frac{\pi}{4}} e^h \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(h) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(h) \right] \\ &= e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} e^h (\cos(h) - \sin(h)). \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\begin{aligned} e^h &\underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\ \cos(h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\ \sin(h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} h + o(h^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) - h + o(h^2) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) \left(1 - h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -h & -\frac{h^2}{2} \\ & +h & -h^2 \\ & & +\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} + o(h^2) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - h^2 + o(h^2)). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right).$$

2.5 On sait que

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \frac{1}{(1+x)^2} &= (1+x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x + (-2)(-3) \frac{x^2}{2} + (-2)(-3)(-4) \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 1\right) (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3).$$

NB : on aurait pu à nouveau anticiper l'ordre et ne prendre le développement limité de $\frac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 1 uniquement.

3. Manipuler un développement usuel.

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - 5$ i.e. $x = 5 + h$ et $g(h) = f(x) = f(5 + h)$. Alors

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad g(h) = f(5 + h) = e^{2(5+h)} = e^{10} e^{2h}.$$

Or on sait que

$$e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + o(u^n).$$

Donc en prenant $u = 2h \rightarrow 0$, on a

$$e^{2h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{2^k h^k}{k!} + o(h^n).$$

Ainsi,

$$g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n e^{10} \frac{2^k h^k}{k!} + o(h^n).$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 5}{=} \sum_{k=0}^n e^{10} \frac{2^k (x-5)^k}{k!} + o((x-5)^n).$$

3.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

Or

$$\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(u^{2n+2}).$$

Ainsi, en posant $u = 2x \rightarrow 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})}{2x} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 4^k x^{2k}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Posons $t = \frac{1}{x}$ i.e. $x = \frac{1}{t}$ et $g(t) = f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Alors

$$\forall t > 0, \quad g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t).$$

Or, on sait que

$$\arctan(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+1}).$$

Ainsi,

$$g(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+1}) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+1}).$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)x^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right).$$

3.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\operatorname{sh}(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(u^{2n+1}).$$

Donc en prenant $u = x^{3/2} \rightarrow 0$, on obtient que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^{3k+\frac{3}{2}}}{(2k+1)!} + o(x^{3n+\frac{3}{2}})}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{3k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{3n+1}).$$

Conclusion, en tronquant à l'ordre $3n$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{3k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{3n}).$$

Déterminer un développement limité à l'ordre $3n$ en 0 de $f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x^{3/2})}{\sqrt{x}}$.

3.5 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} u^k}{k} + o(u^n).$$

Donc en posant $u = 3x \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(1+3x) - 3x &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} 3^k x^k}{k} + o(x^n) - 3x \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1} 3^k x^k}{k} + o(x^n). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1} 3^k x^k}{k} + o(x^n).$$

4. Primitivation, dérivation, Taylor.

4.1 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- La fonction f admet le développement limité d'ordre 4 en 0 suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (-1/2)(-x^2) + (-1/2)(-3/2) \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

- La fonction arcsin est une primitive de f sur I .

Alors par le théorème de primitivation des développements limités, on en déduit que arcsin admet un développement limité d'ordre 5 donné par

$$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{important !}}}{\arcsin(0)} + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Conclusion,

$$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$. Puisque la fonction f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $I =]-\infty; -1[$, par le théorème de Taylor-Young, on sait que f admet un développement limité d'ordre n :

$$\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Posons $g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On observe que la fonction g est dérivable sur I et

$$\forall a \in I, \quad g'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x).$$

Donc g est une primitive de f . Donc par le théorème de primitivation des développements limités, on trouve que

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1} x^k}{k} + o(x^{n+1})$$

D'autre part, on sait que

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} + o(x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + o(x^{n+1}).$$

Donc par unicité des développements limités :

$$\begin{cases} g(0) = 1 \text{ OK.} \\ \forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \frac{a_{k-1}}{k} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = k+1.$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (k+1) x^k + o(x^n).$$

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction ch est \mathcal{C}^{2n} sur $I = \mathbb{R}$, voisinage de 1. Donc d'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\text{ch}^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k + o((x-1)^{2n}).$$

Or on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, k pair, on a $\text{ch}^{(k)} = \text{ch}$ tandis que pour tout $k \in \mathbb{N}$, k impair, on a $\text{ch}^{(k)} = \text{sh}$. Séparons donc dans la somme les termes pairs et les termes impairs :

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\text{ch}^{(2k)}(1)}{(2k)!} (x-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{ch}^{(2k+1)}(1)}{(2k+1)!} (x-1)^{2k+1} + o((x-1)^{2n}).$$

Ainsi,

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\text{ch}(1)}{(2k)!} (x-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{sh}(1)}{(2k+1)!} (x-1)^{2k+1} + o((x-1)^{2n}).$$

4.4 Soit $f : t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t$. La fonction f est définie et même dérivable sur $I =]-1; +\infty[$, voisinage de 0 et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \ln(1+t) + \frac{1+t}{1+t} - 1 = \ln(1+t).$$

Posons $g : t \mapsto \ln(1+t)$. Alors

- La fonction g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 donné par

$$g(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5).$$

- La fonction f est une primitive de g sur I .

Donc d'après le théorème de primitivation des développements limités, la fonction f admet un développement limité en 0 d'ordre 6 donné par

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{20} + \frac{t^6}{30} + o(t^6).$$

4.5 Soient $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$. On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 - \frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{5} - \frac{x^9}{7} + o(x^9).$$

Soit $g : x \mapsto 2x \arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$. La fonction g est définie et même \mathcal{C}^8 sur \mathbb{R} et notamment en 0 donc par le théorème de Taylor-Young, admet un développement limité à l'ordre 8 en 0 :

$$\exists (a_0, \dots, a_8) \in \mathbb{R}^9, \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^8 a_k x^k + o(x^8).$$

D'autre part, on observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x \arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2} = g(x).$$

Donc f est une primitive de g sur \mathbb{R} . Donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} + a_4 \frac{x^5}{5} + a_5 \frac{x^6}{6} + a_6 \frac{x^7}{7} + a_7 \frac{x^8}{8} + a_8 \frac{x^9}{9} + o(x^9).$$

Par unicité du développement limité, on obtient que

$$f(0) = 0, \quad a_0 = a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0, \quad \frac{a_2}{3} = 1, \quad \frac{a_4}{5} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{a_6}{7} = \frac{1}{5}, \quad \frac{a_8}{9} = -\frac{1}{7}.$$

Conclusion,

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x^2 - \frac{5}{3}x^4 + \frac{7}{5}x^6 - \frac{9}{7}x^8 + o(x^8).$$

5. Application de développement limité.

5.1 On a au voisinage de 0 :

$$\operatorname{sh}(x) + \sin(x) - 2x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - 2x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{60} + o(x^5).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{sh}(x) + \sin(x) - 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^5}{60}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x(\operatorname{ch}(x) + \cos(x) - 2) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(\frac{x^4}{12} + o(x^4) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} + o(x^5). \end{aligned}$$

Et donc

$$x(\operatorname{ch}(x) + \cos(x) - 2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^5}{12}.$$

Donc par quotient d'équivalents,

$$\frac{\operatorname{sh}(x) + \sin(x) - 2x}{x(\operatorname{ch}(x) + \cos(x) - 2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^5}{60}}{\frac{x^5}{12}} = \frac{12}{60} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Or deux équivalents ont même limite. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x) + \sin(x) - 2x}{x(\operatorname{ch}(x) + \cos(x) - 2)} = \frac{1}{5}.$$

5.2 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n\sqrt{n} \left(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n + a} \right)$. On a au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\sqrt{n} \left(\sqrt{n} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{a}{n}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{a}{n}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2 \left(1 + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{a}{2n} + \frac{(1/2)(-1/2)a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2 \left(-\frac{a}{2n} + \frac{2+a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{a}{2}n + \frac{2+a^2}{8} + o(1). \end{aligned}$$

Donc si $a \neq 0$,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{2}n \pm \infty.$$

ATTENTION!!! Il est vital de dire $a \neq 0$ avant de préciser l'équivalent car nul n'est équivalent à la suite nulle !

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Ainsi, pour obtenir la convergence de la suite, il faut que $a = 0$ et dans ce cas

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{8} + o(1) \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0, \quad \text{dans ce cas,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}.$$

5.3 On a au voisinage de 0 :

$$f(x) = (1 - x + x^2)^{1/x} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{x} \ln(1 - x + x^2)}.$$

Or $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + x^2$. Alors,

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
- Puis

$$u(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - 2x^3 + o(x^3).$$

- Comme $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$, on a $u(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^3$ i.e. $u(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} -x^3 + o(x^3)$.
- Et donc $o(u(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(1 - x + x^2) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x + x^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3 + o(x^3)) + \frac{1}{3}(-x^3 + o(x^3)) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{x}(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3))} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{-1 + \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{-1} e^{\frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)}.$$

Or $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$. Alors,

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus, $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc $u(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$ i.e. $u(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.
- Enfin, $o(u(x)^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{-1} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + o(x^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{4} + o(x^2) \right) + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2}x + \frac{20e^{-1}}{24}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2}x + \frac{5e^{-1}}{6}x^2 + o(x^2).$$

Ainsi,

la courbe représentative de f admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2}x$.

De plus,

$$f(x) - \left(e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2}x \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{5e^{-1}}{6}x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{5e^{-1}}{6}x^2 \geq 0.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Conclusion,

la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

5.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, posons $h = x - 1$ i.e. $x = 1 + h$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) = f(1+h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{(1+h)^{1+\frac{1}{1+h}} - 1}{1+h-1} \\ &= \frac{e^{(1+\frac{1}{1+h}) \ln(1+h)} - 1}{h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e^{(1+1-h+h^2-h^3+o(h^3))(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3))} - 1}{h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e^{2h-h^2+\frac{2h^3}{3}+o(h^3)-h^2+\frac{h^3}{2}+o(h^3)+h^3+o(h^3)+o(h^3)} - 1}{h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e^{2h-2h^2+\frac{13h^3}{6}+o(h^3)} - 1}{h} \end{aligned}$$

Or on a $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Posons $u(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 2h - 2h^2 + \frac{13h^3}{6} + o(h^3)$. Alors,

- $u(h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$
- De plus,

$$\begin{aligned} u(h)^2 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(2h - 2h^2 + \frac{13h^3}{6} + o(h^3)\right) \left(2h - 2h^2 + \frac{13h^3}{6} + o(h^3)\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{array}{rcl} 4h^2 & -4h^3 & +o(h^3) \\ & -4h^3 & +o(h^3) \\ & & +o(h^3) \end{array} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{array}{rcl} 4h^2 & -8h^3 & +o(h^3) \end{array}. \end{aligned}$$

- Comme $u(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 2h$, on a $u(h)^3 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 8h^3$ i.e. $u(h)^3 \underset{h \rightarrow 0}{=} 8h^3 + o(h^3)$.
- Enfin, $o(u(h)^3) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h^3)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^{2h-2h^2+\frac{13h^3}{6}+o(h^3)} &\underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{array}{rcl} 1 & +2h & -2h^2 & +\frac{13h^3}{6} & +o(h^3) \\ & & +\frac{1}{2}(4h^2) & -8h^3 & +o(h^3) \\ & & & +\frac{1}{6}(8h^3) & +o(h^3) \\ & & & & +o(h^3) \end{array} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{array}{rcl} 1 & +2h & & -\frac{3h^3}{6} & +o(h^3) \end{array}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(1+h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1+2h-\frac{3h^3}{6}+o(h^3)-1}{h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{2h-\frac{3h^3}{6}+o(h^3)}{h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} 2 - \frac{3h^2}{6} + o(h^2). \end{aligned}$$

D'où,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} 2 - \frac{3(x-1)^2}{6} + o((x-1)^2).$$

Par conséquent,

la courbe représentative de f admet pour tangente en 1 la droite d'équation $y = 2$.

De plus, $f(x) - 2 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{3(x-1)^2}{6} \leq 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré donc

la courbe représentative de f est en-dessous de sa tangente au voisinage de 1.

5.5 On a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5 - \left(x^3 + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5} + o(x^{15})\right)}{x^4 + 1 - \frac{x^{14}}{2} + \frac{x^{28}}{24} + o(x^{28})} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-x^3 + x^5 - \frac{x^9}{3} - \frac{x^{15}}{5} + o(x^{15})}{1 + x^4 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15})}. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$. Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15})$. Alors,

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$u(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^4 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15})\right) \left(x^4 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15})\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^8 + o(x^{15})$$

- Puis,

$$u(x)^3 = u(x)u(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^4 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15})\right) (x^8 + o(x^{15})) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{12} + o(x^{15}).$$

- Mais aussi, puisque $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^4$, alors $u(x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{16}$. Par conséquent, $u(x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{15})$.
- A fortiori, $o(u(x)^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{15})$.

Attention : il était important d'aller jusqu'à l'ordre 4 même si $u(x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{15})$, en effet en restant à l'ordre 3, nous aurions eu $o(u(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{12})$ ce qui aurait été insuffisant.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-x^3 + x^5 - \frac{x^9}{3} - \frac{x^{15}}{5} + o(x^{15})\right) \left(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \frac{x^{14}}{2} + o(x^{15})\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x^3 + x^7 - x^{11} + x^{15} + o(x^{15}) + x^5 - x^9 + x^{13} + o(x^{15}) - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{13}}{9} + o(x^{15}) - \frac{x^{15}}{5} + o(x^{15}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x^3 + x^5 + x^7 - \frac{4x^9}{3} - x^{11} + \frac{10x^{13}}{9} + \frac{4x^{15}}{5} + o(x^{15}). \end{aligned}$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^{15} au voisinage de 0 comme composée de fonctions qui le sont. Donc par la formule de Taylor-Young,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{15} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{15}).$$

Donc par unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient que

$$\frac{f^{(15)}(0)}{(15)!} = \frac{4}{5}.$$

Conclusion,

$$f^{(15)}(0) = \frac{4}{5} 15! = 12 \times 14!$$