Interrogation 15 d'entrainement
Ensembles et Applications

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
   1.2 Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
   1.3 Définir l'injectivité et la surjectivité.
   1.4 Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse (Prop II.16).
   1.5 Qu'est-ce qu'un professeur de mathématiques ?

   Révisions

   1.6 Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène d'ordre 1.
   1.7 Enoncer la proposition qui affirme que l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
   1.8 Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
   1.9 Enoncer le principe de superposition.
   1.10 Définir un problème de Cauchy.

2. **Donner un ensemble image ou réciproque.** Donner dans chaque exemple l'ensemble image ou réciproque demandé.

   2.1 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f([-3\,;4])$?

   2.2 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f^{-1}([-3\,;4])$?

   2.3 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M) \end{array}$, $f(\mathscr{A}_2(\mathbb{R}))$?

   2.4 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M) \end{array}$, $f^{-1}(\{1\})$?

   2.5 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & z+\overline{z} \end{array}$, $f(\mathbb{U})$?

   2.6 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & z+\overline{z} \end{array}$, $f^{-1}(]-4\,;+\infty[)$?

   2.7 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T+M \end{array}$, $f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$?

   2.8 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T+M \end{array}$, $f^{-1}(\{0_n\})$?

   2.9 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$, $f\left(\left[\frac{\pi}{2}\,;4\pi\right]\right)$?

   2.10 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$, $f^{-1}\left(\left[0\,;\frac{1}{2}\right]\right)$?

   2.11 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$, $f([-3\,;2]\times[-2\,;3])$?

   2.12 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$, $f^{-1}(\{0_\mathbb{R}\})$?

   2.13 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(\cos,\sin) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array}$, $f(\mathrm{Vect}(\cos,\sin))$?

   2.14 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(\cos,\sin) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array}$, $f^{-1}(\{0_\mathbb{R}\})$?

   2.15 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{array}$, $f(\mathbb{R})$?

   2.16 Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{array}$, $f^{-1}\left(\left\{e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}\right)$?

   2.17 Pour $E=\{1,2,3\}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & A\cap\{1\} \end{array}$, $f(\mathscr{P}(E))$?

   2.18 Pour $E=\{1,2,3\}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & A\cap\{1\} \end{array}$, $f^{-1}(\{\{1\}\})$?

3. **Manipuler les ensembles.**
   3.1 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
   3.2 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
   3.3 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   3.4 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   3.5 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   3.6 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   3.7 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $A \in \mathscr{P}(F)$. Montrer que $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$.
4. **Manipuler les injections - surjections.**
   4.1 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$. Montrer que $g \circ f$ est surjective implique que g est surjective.
   4.2 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(F, G)$ injective. Montrer que pour tout $(g, h) \in \mathscr{F}(E, F)$, on a $f \circ g = f \circ h \ \Rightarrow g = h$.
   4.3 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathscr{F}(E, F)$ injective. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   4.4 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathscr{F}(E, F)$ surjective. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(F)$, $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$.
   4.5 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective.
5. **Faire de la composition de développement limité.**
   5.1 Calculer un développement à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.
   5.2 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln(\arctan(x))$.
   5.3 Calculer un développement à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{sh}(x))$.
   5.4 Calculer un développement à l'ordre 3 en 1 de $f : x \mapsto \frac{x-1}{2+\ln(x)}$.
   5.5 Calculer un développement à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$.