Correction de l'interrogation 16 d'entrainement
Continuité et dérivabilité

1. **Restituer le cours.**

   1.1 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f, g et h trois éléments de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que
   - pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,
   - il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$.

   Alors on a également $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

   1.2 Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors les deux points suivants sont équivalents :
   i. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
   ii. pour tout suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a, on a $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l.

   1.3 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur le segment $[a; b]$. Alors, f est bornée sur $[a; b]$ et atteint ses bornes :
   $$\exists (\alpha, \beta) \in [a; b]^2\,,\ f(\alpha) = m = \min_{t \in [a;b]} f(t) \text{ et } f(\beta) = M = \max_{t \in [a;b]} f(t).$$

   1.4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

   1.5 Posons $LO = $ *lipschitzienne*. Alors on obtient, à l'endroit puis à l'envers :
   $$LOOL$$

2. (a) **Définitions sur exemples.**

   2.1 $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 si et seulement si
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [0\,;\,\eta]\,,\quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| \leqslant \varepsilon$$

   2.2 sh est dérivable en 3 et sa dérivée vaut ch(3) si et seulement si
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [3 - \eta\,;\,3 + \eta] \setminus \{3\}\,,\quad \left|\frac{\operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(3)}{x - 3} - \operatorname{ch}(3)\right| \leqslant \varepsilon$$

   2.3 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ si et seulement si
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [-\eta\,;\,\eta] \setminus \{0\}\,,\quad \left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

   2.4 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 5 si et seulement si
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [5\,;\,5 + \eta]\,,\quad |\lfloor x \rfloor - \lfloor 5 \rfloor| \leqslant \varepsilon\,.$$

   2.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x^n \underset{x \to +\infty}{\ll} \mathrm{e}^x$ si et seulement si
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [A\,;\,+\infty[\,,\quad \left|\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

2.6 $x \mapsto \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall l \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in [A\,;\,+\infty[\,,\quad |\cos(x) - l| > \varepsilon\,.$$

2.7 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [-\eta\,;\,0[\,,\quad \frac{1}{x} \leqslant M.$$

2.8 f est bornée au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [A\,;\,+\infty[\,,\quad |f(x)| \leqslant M.$$

Attention à bien mettre le M avant les x.

2.9 f est positive au voisinage de 0 si et seulement si

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in [-\eta\,;\,\eta]\,,\quad f(x) \geqslant 0.$$

2.10 $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche en 0 et cette dérivée vaut -1 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [-\eta\,;\,0[\,,\quad \left|\frac{|x| - |0|}{x - 0} + 1\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

(b) **Théorèmes sur exemples.**

2.1 $x \mapsto x\sin(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

Supposons que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Notons-la l. Alors par **la caractérisation séquentielle** de la limite, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} f(v_n) = l.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Donc

$$0 = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l = \lim_{n \to +\infty} f(v_n) = +\infty.$$

Impossible. Donc $x \mapsto x\sin(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$.

2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [0\,;\,1]$ tel que $\ln(1 + x^n) = -x + 1$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \ln(1 + x^n) + x - 1$. La fonction f est définie et continue sur $[0\,;\,1]$. De plus $f(0) = \ln(1) - 1 = -1 < 0$ et $f(1) = \ln(2) > 0$. Donc **par le théorème des valeurs intermédiaires**, il existe (au moins) un réel $x \in [0\,;\,1]$ (et même dans $]0\,;\,1[$).

2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x + 3)^n - x^n = 3n\alpha^{n-1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f : x \mapsto x^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction f est continue sur $[x\,;\,x + 3]$ et dérivable sur $]x\,;\,x + 3[$. Donc **par l'identité des accroissements finis**,

$$\exists \alpha \text{ \textit{(qui dépend de x)} } \in]x\,;\,x + 3[\subseteq \mathbb{R}, \qquad f(x + 3) - f(x) = f'(\alpha)(x + 3 - x)\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x + 3)^n - x^n = 3n\alpha^{n-1}.$$

2.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est continue sur $[x\,;\,x+1] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $]x\,;\,x+1[$. Donc par **le théorème des accroissements finis**,

$$\exists t \in]x\,;\,x+1[\,, \qquad |\ln(x+1) - \ln(x)| \leqslant \left|\ln'(t)\right| |x+1-x| = \left|\frac{1}{t}\right|.$$

Pour tout $t \in]x\,;\,x+1[$, on a

$$0 < \frac{1}{x+1} \leqslant \ln'(t) = \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$$

Donc

$$\ln(x+1) - \ln(x) = |\ln(x+1) - \ln(x)| \leqslant \left|\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2.5 La fonction $x \mapsto \frac{x^3\,\mathrm{e}^{\sin(100x)}}{x+3}$ est bornée sur $[0\,;\,1]$.

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3\,\mathrm{e}^{\sin(100x)}}{x+3}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, notamment f est continue sur le segment $[0\,;\,1] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Donc **par le théorème des bornes atteintes** f est bornée (et atteint ses bornes) sur $[0\,;\,1]$.

2.6 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$-x \leqslant x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x.$$

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} -x = 0$. Donc **par le théorème d'encadrement**, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

2.7 Pour tout $y \in]-1\,;\,0[$, il existe $x \in]-1\,;\,1[$ tel que $\arcsin(y+1) = \arcsin(y) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $y \in]-1\,;\,0[\subseteq [-1\,;\,1]$. Alors $y+1 \in]0\,;\,1[\subseteq [-1\,;\,1]$ et donc $[y\,;\,y+1] \subseteq [-1\,;\,1]$. La fonction arcsin est donc continue sur $[y\,;\,y+1]$, dérivable sur $]y\,;\,y+1[$. **Par l'identité des accroissements finis**, on en déduit qu'il existe $x \in]y\,;\,y+1[\subseteq]-1\,;\,1[$ tel que

$$\arcsin(y+1) - \arcsin(y) = \arcsin'(x)\,(y+1-y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \arcsin(y+1) = \arcsin(y) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe un unique $x \in [1\,;\,+\infty[$ tel que $x^n = x+1$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^n - x - 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1} - 1$. Donc pour tout $x > 1$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $I = [1\,;\,+\infty[$. De plus f est continue sur I. Donc **par le théorème de la bijection**, on a $J = f(I) = [f(1)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1\,;\,+\infty[$ et puisque $0 \in J$, on en déduit qu'il existe un unique $x \in I = [1\,;\,+\infty[$ tel que $f(x) = 0$ i.e. tel que $x^n = x+1$.

2.9 La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{\cos(x)}{\ln(x)}\right)$ admet un maximum sur $[2\,;\,3]$.

Soit $f : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{\cos(x)}{\ln(x)}\right)$. La fonction f est définie sur $]0\,;\,1[\, \cup\,]1\,;\,+\infty[$, notamment sur le segment $[2\,;\,3]$. La fonction f est continue sur son domaine de définition en tant que composée de fonctions qui le sont. Donc f est continue sur le segment $[2\,;\,3]$. Donc **par le théorème des bornes atteintes,** f est bornée sur $[2\,;\,3]$ et atteint ses bornes et donc elle admet notamment un maximum sur $[2\,;\,3]$.

2.10 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor = 0.$

Pour tout $x\neq 0$, on a
$$\frac{1}{x}-1\leqslant \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}.$$
Donc, pour tout $x>0$
$$\forall x>0,\qquad 1-x\leqslant x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant 1\qquad \text{et}\qquad \forall x<0,\qquad 1-x\geqslant x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant 1.$$
Par conséquent, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,
$$0\leqslant \left|x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor-1\right|\leqslant |x|$$
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}|x|=0$. Donc **par le théorème d'encadrement** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left|x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor-1\right|=0$ i.e.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1.$$

3. **Montrer qu'une fonction est lipschitzienne.**

3.1 La fonction arccos est dérivable sur $I=\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et pour tout $x\in I$,
$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Or pour tout $x\in I$, $0\leqslant x^2\leqslant\frac{1}{4}$ donc $\sqrt{1-x^2}\geqslant\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, pour tout $x\in I$,
$$\frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\leqslant \arccos'(x)\leqslant 0\qquad\Rightarrow\qquad |\arccos'(x)|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$
Soit $(x,y)\in I^2$, $x\neq y$. La fonction arccos est continue sur $[x;y]$ ou $[y;x]$ et dérivable sur $]x\,;\,y[$ ou $]y\,;\,x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,
$$\exists t\in\,]x;y[\,(\text{ou }]y;x[),\qquad |\arccos(x)-\arccos(y)|=|\arccos'(t)|\,|x-y|\,.$$
Puisque $t\in\,]x;y[\,\subseteq I$, on a $|\arccos'(t)|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc
$$|\arccos(x)-\arccos(y)|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\,|x-y|\,,$$
encore reste vrai si $x=y$. Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction arccos est }\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{-lipschitzienne sur }I=\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right].}$$

3.2 La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$
Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+x^2\geqslant 1$ donc
$$0\leqslant\arctan'(x)\leqslant 1.$$
Soit $(x,y)\in I^2$, $x\neq y$. La fonction arctan est continue sur $[x;y]$ ou $[y;x]$ et dérivable sur $]x;y[$ ou $]y;x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,
$$\exists t\in\,]x;y[\,(\text{ou }]y;x[),\qquad |\arctan(x)-\arctan(y)|=|\arctan'(t)|\,|x-y|\leqslant|x-y|\,,$$
ce qui reste vrai si $x=y$. Conclusion,
$$\boxed{\text{La fonction arctan est 1-lipschitzienne sur }\mathbb{R}.}$$

3.3 La fonction f est définie et même dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

Or pour tout $x \geqslant 1$, $0 < \frac{1}{x^2} \leqslant 1$ et $0 < \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \leqslant 1$ donc

$$\forall x > 1, \qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$

Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in \,]x; y[\,(\text{ou }]y; x[), \qquad |f(x) - f(y)| = |f'(t)|\,|x - y| \leqslant |x - y|\,,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est 1-lipschitzienne sur } [1\,;\,+\infty[.}$$

3.4 La fonction tan est définie et même dérivable sur $I = \left[\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right]$ et pour tout $x \in I$, on a $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$. Or par croissance de la fonction tangente sur I, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} -1 = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \leqslant \tan(x) \leqslant \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1 \qquad &\Rightarrow \qquad 0 \leqslant \tan^2(x) \leqslant 1 \\ &\Rightarrow \qquad 0 \leqslant \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \leqslant 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in I, \qquad |\tan'(x)| \leqslant 2.$$

Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. La fonction tan est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in \,]x; y[\,(\text{ou }]y; x[), \qquad |\tan(x) - \tan(y)| = |\tan'(t)|\,|x - y| \leqslant 2\,|x - y|\,,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction tan est 2-lipschitzienne sur } I = \left[\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right].}$$

3.5 La fonction $f : x \mapsto \ln(5x + 2)$ est définie et même dérivable sur $\left]-\frac{2}{5}\,;\,+\infty\right[$ donc notamment sur $[0\,;\,1]$. De plus,

$$\forall x \in [0\,;\,1]\,, \qquad f'(x) = \frac{5}{5x + 2}.$$

Or pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $2 \leqslant 5x + 2 \leqslant 7$ donc $\frac{5}{7} \leqslant \frac{5}{5x+2} \leqslant \frac{5}{2}$. Ainsi,

$$\forall x \in [0\,;\,1]\,, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{5}{2}.$$

Soit $(x, y) \in [0\,;\,1]^2$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x\,;\,y]$ ou $[x\,;\,y]$ et dérivable sur $]x\,;\,y[$ ou $]y\,;\,x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in \,]x; y[\,(\text{ou }]y; x[), \qquad |f(x) - f(y)| = |f'(t)|\,|x - y| \leqslant \frac{5}{2}\,|x - y|\,,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \frac{5}{2}\text{-lipschitzienne sur } [0\,;\,1].}$$

4. **Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$.**

4.1 On observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^{3/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (-x)^{3/2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0) = 0.$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Donc, par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

4.2 On a $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^4} = +\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \mathrm{e}^{-\infty} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{4}{x^5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}}.$$

Posons $u = \frac{1}{x^4}$. Par croissance comparée, on a $\lim_{u\to+\infty} u^2\,\mathrm{e}^{-u} = 0$ donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{4}{x^5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 4x^3 \times \frac{1}{x^8}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}} = 0 \times 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0.$$

Donc

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

4.3 On sait que $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)x - \operatorname{sh}(x)}{x^2}.$$

Donc

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{(1+o(x))\,x - x + o\left(x^2\right)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x + o\left(x^2\right) - x + o\left(x^2\right)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} o(1).$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

4.4 On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \mathrm{e}^{-\infty} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. Par croissance comparée, on a $\lim_{u\to+\infty} u^2\,\mathrm{e}^{-u} = 0$ donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to+\infty} u^2\,\mathrm{e}^{-u} = 0.$$

Et de même,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to-\infty} -u^2\,\mathrm{e}^{u} = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0.$$

Donc

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

4.5 On a $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{3/2}}{2} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0.$$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)\sqrt{x} - \frac{\operatorname{ch}(x)-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x\operatorname{sh}(x) - (\operatorname{ch}(x) - 1)}{2x^{3/2}}.$$

Donc

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{2x^2 + o\left(x^2\right) - \frac{x^2}{2}}{2x^{3/2}} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{2x^{3/2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3\sqrt{x}}{4}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{3\sqrt{x}}{4} = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

5. **Compositions de développements limités.**

5.1 On a

$$\cos(2x)+\sin(3x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{4x^2}{2}+o\left(x^2\right)+3x+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1+3x-2x^2+o\left(x^2\right).$$

De plus $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} 3x-2x^2+o\left(x^2\right)$. Alors

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- $u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(3x-2x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(3x-2x^2+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 9x^2+o\left(x^2\right)$.
- $o\left(u^2(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Ainsi,

$$f(x)=\frac{1}{\cos(2x)+\sin(3x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(3x-2x^2+o\left(x^2\right)\right)+9x^2+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1-3x+11x^2+o\left(x^2\right).}$$

5.2 On a

$$3+\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 3+1-x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 4\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right).$$

De plus, $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)$. Alors

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- $u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{16}+o\left(x^2\right)$.
- $o\left(u^2(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Ainsi,

$$f(x)=\frac{x}{3+\mathrm{e}^{-x}} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{4}\frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{4}\left[1-\left(-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right)+\frac{x^2}{16}+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)\right].$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{4}+\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{64}+o\left(x^3\right).}$$

5.3 Posons $h=x-1$. On sait *(rappel : les formules des fonctions hyperboliques s'obtiennent à partir des formules trigonométriques en remplaçant* $\cos$ *par* ch *et* $\sin$ *par* $i\,\mathrm{sh}$*)* que pour tout $h\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}(1+h)=\mathrm{sh}(1)\,\mathrm{ch}(h)+\mathrm{ch}(1)\,\mathrm{sh}(h).$$

Donc

$$\mathrm{sh}(1+h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{sh}(1)\left(1+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right)+\mathrm{ch}(1)\left(h+o\left(h^2\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{sh}(1)+\mathrm{ch}(1)\,h+\frac{\mathrm{sh}(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right).$$

Par suite,

$$f(1+h)=\mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1+h)} \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)+\mathrm{ch}(1)h+\frac{\mathrm{sh}(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)} \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{ch}(1)h+\frac{\mathrm{sh}(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)}.$$

De plus, $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$. Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{ch}(1)\,h+\frac{\mathrm{sh}(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)$. Alors

- $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- $u^2(h) \underset{h\to 0}{=} \left(\mathrm{ch}(1)\,h+\frac{\mathrm{sh}(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)\right)\left(\mathrm{ch}(1)\,h+\frac{\mathrm{sh}(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{ch}^2(1)\,h^2+o\left(h^2\right)$. Donc

$$\frac{u^2(h)}{2} \underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{ch}^2(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right).$$

- $o\left(u^2(h)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^2\right)$.

Par conséquent,

$$f(1+h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{e}^{u(h)} \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}\left[1+\mathrm{ch}\,(1)\,h+\frac{\mathrm{sh}(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)+\frac{\mathrm{ch}^2\,(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)+o\left(h^2\right)\right].$$

Ainsi,

$$f(1+h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}+\mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{ch}\,(1)\,h+\mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}\,\frac{\mathrm{sh}(1)+\mathrm{ch}^2\,(1)}{2}h^2+o\left(h^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}+\mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{ch}\,(1)\,(x-1)+\mathrm{e}^{\mathrm{sh}(1)}\,\frac{\mathrm{sh}(1)+\mathrm{ch}^2\,(1)}{2}\,(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).}$$

5.4 Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a $f(x)=\mathrm{e}^{\dfrac{\ln(1+2x)}{x}}$. Donc au voisinage de 0, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{2x-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^4}{4}+o\left(x^4\right)}{x}} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{2-2x+\frac{8x^2}{3}-4x^3+o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{-2x+\frac{8x^2}{3}-4x^3+o\left(x^3\right)}$$

Or $\mathrm{e}^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -2x+\frac{8x^2}{3}-4x^3+o\left(x^3\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned}
u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-2x+\frac{8x^2}{3}-4x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(-2x+\frac{8x^2}{3}-4x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 4x^2-\frac{16x^3}{3}+o\left(x^3\right)-\frac{16x^3}{3}+o\left(x^3\right)+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 4x^2-\frac{32x^3}{3}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2x$, alors $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} -8x^3$ et donc $u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} -8x^3+o\left(x^3\right)$.
- Enfin, $o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(-8x^3+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

D'où,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^2\left(1+u(x)+\frac{u(x)^2}{2}+\frac{u(x)^3}{6}+o\left(u(x)^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^2(1-2x \quad +\tfrac{8x^2}{3} \quad -4x^3 \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}[4x^2 \quad -\tfrac{32x^3}{3} \quad +o\left(x^3\right)]\\
&\qquad\qquad\qquad +\frac{1}{6}[-8x^3 \quad +o\left(x^3\right)]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(u(x)^3\right))\\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^2-2\,\mathrm{e}^2\,x+\tfrac{14\,\mathrm{e}^2}{3}x^2-\tfrac{32\,\mathrm{e}^2}{3}x^3+o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^2-2\,\mathrm{e}^2\,x+\frac{14\,\mathrm{e}^2}{3}x^2-\frac{32\,\mathrm{e}^2}{3}x^3+o\left(x^3\right).}$$

5.5 On observe qu'au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} &\underset{x\to 0}{=} 1+1+\frac{x}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^3+o\left(x^3\right)\\
&\qquad +1-\frac{x}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2-\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^3+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 3-\frac{x^2}{4}+o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)}.$$

On a $\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

- Et $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Dès lors,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).}$$