

Interrogation 18 d'entraînement

Polynômes

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir le polynôme dérivé.
- 1.2 Énoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
- 1.3 Énoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
- 1.4 Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
- 1.5 Définir une racine de multiplicité m .
- 1.6 Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.
- 1.7 Préciser l'écriture de l'ensemble des korrigans (oui bon des farfadets pour les bretons) aimables ayant de l'humour.

Révisions

- 1.8 Énoncer la propriété donnant la transposée du produit.
- 1.9 Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
- 1.10 Énoncer les opérations élémentaires.
- 1.11 A l'aide des opérations élémentaires donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
- 1.12 Énoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
- 1.13 Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique? (Prop II.4)
- 1.14 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.

2. Déterminer un degré.

- 2.1 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geq 3$ et $Q = XP - X^2P^{(3)} + 5X^4P''$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{4n+1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) X^k$. Déterminer $\deg(P)$.
- 2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n$ et $Q = P(X+1) - P(X-1)$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.4 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geq 2$ et $Q = (X^3 - 5)P'' + X^2 \circ P$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.5 Soient $n \in \mathbb{N}$, $P = \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)^2 X^k$ et $Q = P(X) + P(-X)$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.6 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geq 2$ et $Q = P \circ (P + 3X)$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.7 Soient $n \geq 2$, $P = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} X^k}{k}$ et $Q = P - X^2P''$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.8 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geq 3$ et $Q = X^2P + X^2 \circ P + X^2 + P$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.9 Quel est le degré de R le reste de la division euclidienne de $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k X^k$ par $X - 1$?
- 2.10 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(2k)!}$ et $Q = P(X^2) - (P(X^2))'' - \frac{X^{2n}}{(2n)!}$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.11 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geq 2$ et $Q = P \circ P \circ P - P^3$. Déterminer $\deg(Q)$.
- 2.12 Soient $n \in \mathbb{N}$, $P = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n (-1)^k P^k$. Déterminer $\deg(Q)$.

Calculer une composition.

En justifiant, calculer le polynôme et le degré demandés.

- 2.13 On pose $P = X^2 - 2X + 3$ et $Q = 2X + 3$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
- 2.14 On pose $P = \frac{X^2}{3}$. Calculer $P \circ P$ et donner son degré.
- 2.15 On pose $P = X^5$ et $Q = 2X^2 + 1$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
- 2.16 On pose $P = 7X + 4$ et $Q = X^8 - X^6 + X^4 + 1$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
- 2.17 On pose $P = \frac{X}{2} + 1$. Pour $n \geq 1$, calculer $R = \underbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}_{n \text{ fois}}$ et donner son degré.

3. Résoudre une équation polynomiale.

- 3.1 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $X^2 P = P^2$.
- 3.2 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P' P'' = 6P$.
- 3.3 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $(2X^2 + X + 1) P'' = (X + 1) P' + 2P$.
- 3.4 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P(X^3) = (X^2 + X + 1) P$.
- 3.5 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P = P(X + 1)$.
- 3.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P' + P = \frac{X^n}{n!}$.

4. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$.

- 4.1 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + (7 - 2i) X^2 - (1 + 14i) X - 7$.
- 4.2 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 16$.
- 4.3 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + X^2 + 5X - 7$.
- 4.4 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 11X^3 + 27X^2 + 11X - 28$.
- 4.5 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 - 3X^5 + 5X^4$.
- 4.6 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 4X - 4$.

Remarquer que i est une racine de P .

5. Déterminer la limite d'une suite complexe.

- 5.1 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$.
- 5.2 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{12n + (5 + 2i)n^2 - (6 + 3i)n^3}{1 + 3n^2 - 5n^3}.$$

- 5.3 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n} e^{in}$.
- 5.4 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 5 + \frac{3}{n} + i(-1)^n$.
- 5.5 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = -5 + 3i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{-1+i}{7} u_n$.

6. BONUS (ne sera pas à l'interro) : calculer une évaluation.

- 6.1 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $P = (X + 1)^2$. Calculer $P(A)$.
- 6.2 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \sum_{k=0}^n X^k$, avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(A)$.
- 6.3 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \sum_{k=0}^n [X^k - k2^{k-1}(X - 2)]$. Calculer $P(A)$.
- 6.4 On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6$. Calculer $P(f)$ pour l'opérateur de composition.
- 6.5 On pose $f : x \mapsto [x] + 2$ et $P = \sum_{k=0}^n kX^k$. Calculer $P(f)$ pour l'opérateur de composition.
- 6.6 On pose $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $P = X^2 - 2X + 1$. Calculer $P(f)$ pour l'opérateur de composition.