

Interrogation 20 d'entraînement

Familles de vecteurs

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir et caractériser une famille libre.
- 1.2 Définir et caractériser une famille liée.
- 1.3 Définir une famille génératrice.
- 1.4 Définir et caractériser une base.
- 1.5 Énoncer le théorème de la base adaptée.
- 1.6 Comment obtient-on les coordonnées ?

Révisions

- 1.7 Énoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
- 1.8 Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
- 1.9 Définir l'injectivité et la surjectivité.
- 1.10 Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse.

2. Familles génératrices.

- 2.1 Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = -3y + t = 2x + 9y - 2z - 3t = 0\}$.
- 2.2 Déterminer une famille génératrice de $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 5f = 0\}$.
- 2.3 Montrer que $\mathcal{G} = (1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
- 2.4 Montrer que $\mathcal{G} = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos(2x))$ est génératrice dans $F = \text{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.
- 2.5 La famille $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-elle génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

3. Familles libres/liées.

3.1 Déterminer si $\mathcal{L} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est libre ou liée.

3.2 Déterminer si $\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre ou liée.

3.3 Soient $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs d'un espace vectoriel E . On pose pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $v_i = \sum_{j=1}^i u_j$. Montrer que $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_p)$ est libre.

3.4 Montrer que $\mathcal{L} = (X(X-1)^2, X^2(X-1), X^3, (X-1)^3)$ est libre.

3.5 Déterminer si $\mathcal{L} = (x \mapsto |x|, x \mapsto |x-1|, x \mapsto |x+1|)$ est libre ou liée.

3.6 Déterminer si $\mathcal{L} = (x \mapsto \sin(x + k\frac{\pi}{4}))_{k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket}$ est libre ou liée.

4. Coordonnées d'un vecteur.

4.1 Soit $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin(2x), x \mapsto \sin(3x), x \mapsto \sin(4x), x \mapsto \sin(5x))$. On admet que $\mathcal{B}$ est libre et on pose $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$. Montrer que $f : x \mapsto \sin^5(x)$ appartient à E et déterminer les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.

4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = ((X-1)^k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$. Justifier que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ et déterminer les coordonnées de P dans $\mathcal{B} = ((X-1)^k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.

Indication : D'après la formule de Taylor...

4.3 Soit $\mathcal{B} = ((2, 3, -1), (1, -1, -2))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $u = (5, 0, -7)$. Montrer que $u \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ et déterminer les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

4.4 Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$ puis déterminer les coordonnées de $u = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

4.5 Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$. Montrer $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

5. Théorème de la base adaptée.

5.1 Soient $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = x + y - z = 0 \}$ et $G = \{ (x + y, x + y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5.2 Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid c = d = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a - b = a + b - 2c = 0 \right\}$. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5.3 Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

5.4 Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

5.5 Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.