

Correction de l'interrogation 20

d'entraînement

Familles de vecteurs

1. Restituer le cours.

1.1 Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{L}$ est libre si et seulement si

- Aucun des vecteurs de $\mathcal{L}$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{L}$
- i.e. pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

1.2 Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{L}$ est liée si et seulement si

- L'un des vecteurs au moins de $\mathcal{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{L}$
- i.e. il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

1.3 Soient E un espace vectoriel non nul et $\mathcal{G}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{G}$ est génératrice dans E si et seulement si $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$.

1.4 Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si

- $\mathcal{B}$ est libre et génératrice dans E
- i.e.

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

1.5 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E , $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G . On pose $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. Alors,

- $F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre.
- $F + G = E \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est génératrice dans E .
- $F \oplus G = E \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une base de E .

1.6 Pour avoir les coordonnées d'une/un $\mathcal{B}_G$, il suffit (ou plutôt « il faut » cela ressemble plus à une condition nécessaire que suffisante...) de demander à la fille ou au garçon si elle/il est libre, surtout si elle/il est canon. C'est la base. Pour engendrer faut peut-être attendre un peu...

2. Familles génératrices.

2.1 On a les égalités entre ensembles suivantes :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x - z = 0 \\ -3y + t = 0 \\ 2x + 9y - 2z - 3t = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x = z \\ t = 3y \\ 2z + 9y - 2z - 9y = 0 \end{array} \right\} \\ &= \{ (z, y, z, 3y) \in \mathbb{R}^4 \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Conclusion, la famille $\mathcal{G} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ est génératrice dans F .

2.2 On considère l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants d'inconnue f deux fois dérivable :

$$(E) \quad f'' + 3f' + 5f = 0$$

Soit

$$(E_c) \quad r^2 + 3r + 5 = 0,$$

l'équation caractéristique associée. Son discriminant vaut $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$. Les racines de (E_c) sont donc $r_1 = \frac{-3+i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2 = \frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{-3x}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \right) \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{-3x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{-3x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Conclusion, la famille $\mathcal{G} = \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{-3x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{-3x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array} \right)$ est génératrice dans F .

2.3 Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{G}) &= \text{Vect}(1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3) \\ &= \text{Vect}(1, X, X-X^2, X^2-X^3) & C_2 &\leftarrow C_1 - C_2 \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2, X^2-X^3) & C_3 &\leftarrow C_2 - C_3 \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2, X^3) & C_4 &\leftarrow C_3 - C_4 \\ &= \mathbb{R}_3[X], \end{aligned}$$

car on reconnaît alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est bien génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{G} \text{ est génératrice dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

2.4 Montrons que $F = \text{Vect}(\mathcal{G})$. Soit $f \in F = \text{Vect}(\cos^2, \sin^2)$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda \cos^2 + \mu \sin^2$. Par linéarisation,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) + \mu \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) = \frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{\lambda - \mu}{2} \cos(2x).$$

Donc $f \in \text{Vect}(\mathcal{G})$ et ainsi $F \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G})$. Attention, cela ne suffit pas pour que $\mathcal{G}$ soit génératrice dans F , car il faut que $\mathcal{G}$ soit une famille de vecteurs de F . Exemple il serait inexact de dire que $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ car $X^2 \notin \mathbb{R}_1[X]$.

Réciproquement si $f \in \text{Vect}(\mathcal{G})$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \lambda + \mu \cos(2x) \\ &= \lambda (\cos^2(x) + \sin^2(x)) + \mu (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= (\lambda + \mu) \cos^2(x) + (\lambda - \mu) \sin^2(x). \end{aligned}$$

Donc $f \in F$ et $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subseteq F$. Conclusion, $F = \text{Vect}(\mathcal{G})$ et $\boxed{\mathcal{G} \text{ est une famille génératrice de } F}$.

Méthode 2. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a donc

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{G}) &= \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(2x)) \\ &= \text{Vect}(\cos^2 + \sin^2, \cos^2 - \sin^2) \\ &= \text{Vect}(\cos^2 + \sin^2, 2\cos^2) & C_2 &\leftarrow C_2 + C_1 \\ &= \text{Vect}(\cos^2 + \sin^2, \cos^2) & C_2 &\leftarrow \frac{1}{2}C_2 \\ &= \text{Vect}(\sin^2, \cos^2) & C_1 &\leftarrow C_1 - C_2 \\ &= \text{Vect}(\cos^2, \sin^2) & C_1 &\leftrightarrow C_2. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{F = \text{Vect}(\mathcal{G}) \text{ et } \mathcal{G} \text{ est génératrice dans } F}$.

2.5 Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Vect}(\mathcal{G}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) & C_1 \leftrightarrow C_4 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) & C_1 \leftrightarrow -\frac{1}{5}C_1 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) & \begin{aligned} C_3 &\leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 &\leftarrow C_4 - C_1 \end{aligned} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftrightarrow C_4 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) & \begin{aligned} C_3 &\leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 &\leftarrow C_4 - 2C_2 \end{aligned} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) & C_3 \leftrightarrow C_4 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_4 \leftarrow \frac{1}{3}C_4 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}
 \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{Vect}(\mathcal{G}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et donc } \mathcal{G} \text{ est génératrice dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

3. Familles libres/liées.

3.1 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2L_1 \\ L_5 &\leftarrow L_5 - L_1 \end{aligned} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_4 = -L_3 \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{2\lambda_4}{3} - \lambda_4 = -\frac{\lambda_4}{3} \\ \lambda_2 = \frac{\lambda_4 - 2\lambda_3}{3} = -\frac{\lambda_4}{3} \\ \lambda_3 = \lambda_4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

En particulier $(-1, -1, 3, 3)$ est une solution **non nulle**. Donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ tel que

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Conclusion, $\mathcal{L}$ est liée.

3.2 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} = 0_2 & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion, $\mathcal{L}$ est libre.

3.3 Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0_E$. Alors,

$$0_E = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i \sum_{j=1}^i u_j.$$

On reconnaît une somme triangulaire. Ainsi,

$$0_E = \sum_{1 \leq j \leq i \leq p} \lambda_i u_j = \sum_{j=1}^p u_j \sum_{i=j}^p \lambda_i = \sum_{j=1}^p \mu_j u_j,$$

où pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\mu_j = \sum_{i=j}^p \lambda_i$. Or la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Donc

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \mu_j = 0_{\mathbb{K}}.$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 0 \\ \mu_2 = \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 0 \\ \vdots \\ \mu_p = \lambda_p = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné, avec un pivot à chaque ligne, il admet donc une unique solution :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Conclusion, la famille $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_p)$ est libre.

3.4 Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$P = \lambda_1 X(X-1)^2 + \lambda_2 X^2(X-1) + \lambda_3 X^3 + \lambda_4 (X-1)^3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}.$$

Alors,

$$P(1) = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad P(0) = -\lambda_4 = 0.$$

Donc

$$0 = P = \lambda_1 X (X - 1)^2 + \lambda_2 X^2 (X - 1) = X (X - 1) [\lambda_1 (X - 1) + \lambda_2 X].$$

Ainsi

$$Q = \lambda_1 (X - 1) + \lambda_2 X = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Donc $Q(0) = -\lambda_1 = 0 = Q(1) = \lambda_2$. Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Conclusion, $\boxed{\mathcal{L} \text{ est libre}}.$

3.5 Notons $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x - 1|$ et $f_3 : x \mapsto |x + 1|$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 |x| + \lambda_2 |x - 1| + \lambda_3 |x + 1| = 0$$

En évaluant en 0, 1, et -1 respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \end{cases} &L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &&&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\mathcal{L} \text{ est libre}}.$

3.6 Posons pour tout $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $f_k : x \mapsto \sin(x + k\frac{\pi}{4})$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sin(x) \\ f_1(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) \\ f_2(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\ f_3(x) &= \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x). \end{aligned}$$

On observe alors en particulier que

$$f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2.$$

Donc f_1 est une combinaison linéaire de f_0 et f_2 . Conclusion, $\boxed{\mathcal{L} \text{ est liée}}.$

4. Coordonnées d'un vecteur.

4.1 La famille $\mathcal{B}$ est libre et par définition elle engendre E donc $\mathcal{B}$ est une base de E . Pour tout $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, on pose $f_k : x \mapsto \sin(kx)$ et $f_0 : x \mapsto 1$. On a donc $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$. On a par la formule d'Euler, celle de Moivre, celle de Newton et le triangle de Pascal pour les coefficients (ouf le beau monde invité ici!),

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\ &= \frac{1}{(2i)^4} \frac{e^{5ix} - 5e^{4ix-i x} + 10e^{3ix-2ix} - 10e^{2ix-3ix} + 5e^{ix-4ix} - e^{-5ix}}{2i} \\ &= \frac{1}{16} \frac{e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)}{16}. \end{aligned}$$

D'où

$$f = 0 \times f_0 + \frac{10}{16} f_1 + 0 \times f_2 - \frac{5}{16} f_3 + 0 \times f_4 + \frac{1}{16} f_5.$$

Par conséquent, $f \in \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ et ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, \frac{10}{16}, 0, -\frac{5}{16}, 0, \frac{1}{16})$.

Pour les curieux, montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 0;5 \rrbracket} \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\sum_{i=0}^5 \lambda_i f_i = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}.$$

En particulier si $x = 0$,

$$0_{\mathbb{R}} = \sum_{i=0}^5 \lambda_i f_i(x) = \lambda_0 + 0 = \lambda_0.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) + \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_4 \sin(4x) + \lambda_5 \sin(5x) = 0. \quad (1)$$

En prenant $x' = x + \pi$, on obtient également

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 &= \lambda_1 \sin(x + \pi) + \lambda_2 \sin(2x + 2\pi) + \lambda_3 \sin(3x + 3\pi) + \lambda_4 \sin(4x + 4\pi) + \lambda_5 \sin(5x + 5\pi) \\ &= -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) - \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_4 \sin(4x) - \lambda_5 \sin(5x) \end{aligned} \quad (2)$$

En faisant (1)+(2), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda_2 \sin(2x) + 2\lambda_4 \sin(4x) = 0$$

Donc pour $x = \frac{\pi}{4}$, $2\lambda_2 = 0$ i.e. $\lambda_2 = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$, $\lambda_4 = 0$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \sin(x) + \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_5 \sin(5x) = 0.$$

Utilisons une autre technique pour varier un peu. On a alors au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} 0 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \lambda_1 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) + \lambda_3 \left(3x - \frac{3^2 x^3}{6} + \frac{3^5 x^5}{120} + o(x^5) \right) + \lambda_5 \left(5x - \frac{5^2 x^3}{2} + \frac{5^5 x^5}{120} + o(x^5) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} (\lambda_1 + 3\lambda_3 + 5\lambda_5)x - \frac{x^3}{6}(\lambda_1 + 3^3\lambda_3 + 5^3\lambda_5) + \frac{x^5}{120}(\lambda_1 + 3^5\lambda_3 + 5^5\lambda_5) + o(x^5) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 + 5\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1 + 3^3\lambda_3 + 5^3\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1 + 3^5\lambda_3 + 5^5\lambda_5 &= 0 \end{cases}$$

On échelonne le système et on obtient finalement que $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$. Or nous avons aussi $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Conclusion, $\mathcal{B}$ est libre et ça nous fait plaisir.

4.2 La famille $\mathcal{B}$ est échelonnée en ses degrés donc $\mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$ et est donc une base de $\text{Vect}(\mathcal{B})$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes,

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k.$$

Donc $P \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ et ainsi $\mathbb{R}_n[X] \subseteq \text{Vect}(\mathcal{B})$. Or $\text{Vect}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(\mathcal{B})$. La famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, toujours par la formule de Taylor, on conclut

$$\text{les coordonnées de } P \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est } \left(P(1), P'(1), \frac{P''(1)}{2}, \dots, \frac{P^{(n)}(1)}{n!} \right).$$

Channé non ?

4.3 Les vecteurs $e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc $\mathcal{B}$ est libre et est donc une base de $\text{Vect}(\mathcal{B})$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u = \lambda e_1 + \mu e_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda + \mu \\ 3\lambda - \mu \\ -\lambda - 2\mu \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = 5 \\ 3\lambda - \mu = 0 \\ -\lambda - 2\mu = -7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = 5 \\ \mu = 3\lambda \\ -\lambda - 2\mu = -7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 3\lambda = 5 \\ \mu = 3\lambda \\ -\lambda - 6\lambda = -7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases} . \end{aligned}$$

On a bien une solution, donc $u = e_1 + 3e_2 \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ et ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, 3)$.

4.4 Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a - b + c \\ -a + ib + ic \\ ia + b - c \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^3} &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -a + ib + ic = 0 \\ ia + b - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ (i - 1)b + (i + 1)c = 0 \\ (1 + i)b + (-1 - i)c = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - iL_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ (i - 1)b + (i + 1)c = 0 \\ \left(-1 - i - \frac{1+i}{-1+i}(1+i)\right)c = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1+i}{-1+i}L_2 \end{aligned}$$

Or

$$-1 - i - \frac{1+i}{-1+i}(1+i) = -1 - i - \frac{(1+2i-1)(-1-i)}{2} = -1 - i + \frac{2i(1+i)}{2} = -1 - i + i - 1 = -2 \neq 0.$$

Donc en remontant le système, on obtient $c = 0$ puis $b = 0$ et $a = 0$. D'où $\mathcal{B}$ est libre. D'autre part, les

opérations élémentaires ne modifient pas le caractère générateur et on obtient

$$\begin{aligned}
 \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i-1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i+1 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) & \begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 &\leftarrow C_3 - C_1 \end{aligned} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i+1 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) & C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i+1 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) & C_2 \leftarrow \frac{1}{2i} C_2 - C_3 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) & \begin{aligned} C_1 &\leftarrow C_1 + C_2 \\ C_3 &\leftarrow C_3 - (1+i) C_2 \end{aligned} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) & C_3 \leftarrow \frac{1}{-1-i} C_3 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) & C_1 \leftarrow C_1 - i C_3 \\
 &= \mathbb{C}^3 & \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{C}^3.
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice dans $\mathbb{C}^3$. Or $\mathcal{B}$ est aussi libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}^3.}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) les trois vecteurs de $\mathcal{B}$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 u = ae_1 + be_2 + ce_3 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b+c \\ -a+bi+ci \\ ai+b-c \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ -a+bi+ci = 1-i \\ ai+b-c = i \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ b(-1+i) + c(1+i) = 2 \\ b(1+i) + c(-1-i) = 1 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - iL_1 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ b(-1+i) + c(1+i) = 2 \\ 2ib = 3 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ b(-1+i) + c(1+i) = 2 \\ b = -\frac{3i}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{1+i} (2 - b(-1+i)) = \frac{1}{1+i} \left(2 + \frac{3i}{2} (-1+i) \right) = \frac{1}{1+i} \left(\frac{1}{2} - \frac{3i}{2} \right) = \frac{(1-i)(1-3i)}{4} \\
 &= \frac{-2-4i}{4} \\
 &= -\frac{1}{2} - i
 \end{aligned}$$

et

$$a = 1 + i + b - c = 1 + i - \frac{3i}{2} + \frac{1}{2} + i = \frac{3+i}{2}.$$

On a donc

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{3+i}{2} \\ b = -\frac{3i}{2} \\ c = -\frac{1}{2} - i. \end{cases}$$

Pensez à vérifier vos calculs en calculant $ae_1 + be_2 + ce_3$.

Conclusion, les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ sont $\left(\frac{3+i}{2}, -\frac{3i}{2}, -\frac{1}{2} - i\right)$.

4.5 Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0_2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+d & a+b+d \\ b+c+d & c+2d \end{pmatrix} = 0_2 & \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ b=0 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ b=0 \\ c+d=0 \\ c+2d=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ b=0 \\ c+d=0 \\ d=0 \end{cases} & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ & \Leftrightarrow a=b=c=d=0. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre.

D'autre part, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Dès lors,

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) & C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \text{car l'on reconnaît la base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Or $\mathcal{B}$ est libre. Conclusion,

$\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Notons (E_1, E_2, E_3, E_4) les quatre matrices de $\mathcal{B}$. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 J = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & a+b+d \\ b+c+d & c+2d \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=1 \\ a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=-1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=-1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ c+d=1 \\ c+2d=-1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ c+d=1 \\ d=-2 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion, les coordonnées de J dans $\mathcal{B}$ sont $(3, -1, 3, -2)$.

5. Théorème de la base adaptée.

5.1 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -x+y+z = 0 \\ x+y-z = 0 \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -x+y+z = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \right\} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array} \right\} \\
 &= \{ (z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Posons $e_1 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{B}_F = (e_1)$. Puisque $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\mathcal{B}_F$ est libre et par ce qui précède génératrice de F . Donc $\mathcal{B}_F$ est une base de F . D'autre part,

$$G = \{ (x+y, x+y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Posons $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B}_G = (e_2, e_3)$. Les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{B}_G$ est libre et par ce qui précède génératrice dans G . Donc $\mathcal{B}_G$ est une base de G .

Posons maintenant $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre.

D'autre part, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) & \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) & C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) & C_3 \leftrightarrow C_2 - C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) & C_1 \leftrightarrow C_1 - C_3 \\ &= \mathbb{R}^3 & \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice. Or $\mathcal{B}$ est aussi libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, on a $\mathcal{B}_F$ base de F , $\mathcal{B}_G$ base de G et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ base de $\mathbb{R}^3$. Donc par le théorème de la base adaptée on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

5.2 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathcal{B}_F$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique. Elle est de plus génératrice dans F et donc forme une base de F .

D'autre part,

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a - b = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} b = a \\ 2a - 2c = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathcal{B}_G$ est libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires. Elle est de plus génératrice dans G par ce qui précède et donc forme une base de G . Enfin, on pose $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Dès lors,

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre. De plus, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. On a donc

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2 \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $\mathcal{B}$ est libre. Donc $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ est une base de G . Donc par le théorème de la base adaptée, on en conclut que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

5.3 Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow \int_0^1 P(t) dt = 0 &\Leftrightarrow \left[a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 \right]_{t=0}^{t=1} = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = -\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{2} \\ &\Leftrightarrow P = a_2 \left(X^2 - \frac{1}{3} \right) + a_1 \left(X - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F = \text{Vect} \left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2} \right).$$

Posons $\mathcal{B}_F = \left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2} \right)$. La famille $\mathcal{B}_F$ est libre car les deux polynômes ne sont pas colinéaires. Elle est de plus génératrice dans F et forme donc une base de F .

Posons $G = \text{Vect}(1)$. Alors $\mathcal{B}_G = (1)$ est libre (car $1 \neq 0$) et génératrice dans G donc forme une base de G . Posons également $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) = \left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}, 1 \right)$. La famille $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes de degrés distincts donc $\mathcal{B}$ est libre. De plus, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}, 1 \right) = \text{Vect} \left(X^2, X, 1 \right) \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + \frac{1}{3}C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{2}C_3 \end{array} \\ &= \mathbb{R}_2[X] \quad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $\mathcal{B}$ est libre donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ est une base de G . Donc par le théorème de la base adaptée on en déduit que

$$\boxed{G = \text{Vect}(1) \text{ est bien un supplémentaire à } F \text{ dans } \mathbb{R}_2[X].}$$

5.4 Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0 &\Leftrightarrow 1 \text{ est racine de multiplicité au moins 2 de } P \\ &&\Leftrightarrow (X-1)^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], \quad P = Q(X-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}, \quad P = (aX + b)(X-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}, \quad P = aX(X-1)^2 + b(X-1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect} \left(X(X-1)^2, (X-1)^2 \right).$$

Posons $\mathcal{B}_F = \left(X(X-1)^2, (X-1)^2 \right)$. Les deux polynômes ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{B}_F$ est libre et par ce qui précède génératrice dans F . Donc $\mathcal{B}_F$ forme une base de F . Posons $\mathcal{B}_G = (X, 1)$ et $G = \text{Vect}(\mathcal{B}_G)$. La famille $\mathcal{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et engendre G donc forme une base de G . Posons enfin $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. Puisque $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes de degrés distincts, on en déduit déjà que $\mathcal{B}$ est libre. Montrons qu'elle est aussi génératrice. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1, X, 1 \right) \\ &= \text{Vect} \left(X^3 - 2X^2, X^2, X, 1 \right) & \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + 2C_3 - C_4 \end{array} \\ &= \text{Vect} \left(X^3, X^2, X, 1 \right) & C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \\ &= \mathbb{R}_3[X] & \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}_3[X]. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$. Or $\mathcal{B}$ est libre et donc $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. De plus $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ est une base de G . Donc par le théorème de la base adaptée, on en déduit que

$$\boxed{G \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

5.5 On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid d = -a - b - c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a - b - c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Posons également $\mathcal{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Dès lors,

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -a - b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre. De plus, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_4 \end{array} \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $\mathcal{B}$ est libre et est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus, $\mathcal{B}_F$ est une sous-famille de $\mathcal{B}$ et est donc libre. Or elle engendre F et forme donc une base de F .

Puisque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_2$, on en déduit que $\mathcal{B}_G$ est libre et génératrice dans G donc forme une base de G .

Par conséquent, d'après le théorème de la base adaptée, on en déduit que

 G est un supplémentaire de F .