

Interrogation 21 d'entraînement Séries numériques

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général? Donner un contre-exemple à la réciproque.
- 1.2 Énoncer le théorème sur les séries de Riemann.
- 1.3 Énoncer le théorème de comparaison.
- 1.4 Énoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
- 1.5 Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée? Contre-exemple de la réciproque?
- 1.6 Quel est le contraire d'un film d'horreur?

Révisions

- 1.7 Énoncer le théorème d'encadrement.
- 1.8 Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
- 1.9 Énoncer la propriété donnant l'image d'un segment...
- 1.10 Énoncer l'identité des accroissements finis.

2. Nature d'une série par équivalent.

- 2.1 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n + 3^n}{5n^3 - \ln(n) + 5^n}$.
- 2.2 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$.
- 2.3 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.
- 2.4 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.
- 2.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = - \left[2 \ln \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) + \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right]$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

3. Théorème de comparaison.

- 3.1 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$.
- 3.2 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^3}$.
- 3.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le reste de n par la division euclidienne par 5.
Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-r_n}}{\sqrt{n}}$.
- 3.4 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln^3(n)}$.
- 3.5 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|P(n)|}{2^n}$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé.

4. Convergence absolue.

- 4.1 Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3 + (-1)^n}}$.
- 4.2 Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ en admettant que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- 4.3 Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.
- 4.4 Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1+i}{3} \right)^n$.
- 4.5 Soit $\omega \in \mathbb{U}_{12}$ une racine douzième de l'unité. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1 + \omega^n}{n^3}$.

5. Calcul et estimation

- 5.1 Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et calculer sa somme totale.
- 5.2 Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\text{ch}(n)}{4^n}$ converge et calculer sa somme totale.
- 5.3 Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{(n+1)!}$ converge et calculer sa somme totale.
- 5.4 Par un encadrement série-intégrale, déterminer un équivalent des sommes partielles de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n}$.
- 5.5 Par un encadrement série-intégrale, déterminer un équivalent du reste de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + 1}$. On pourra admettre la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + 1}$.
- 5.6 Par un encadrement série-intégrale, montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k e^{-k} = \mathcal{O}(n e^{-n})$ et (pour les plus courageux) $n e^{-n} = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k e^{-k}\right)$. On pourra admettre la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n e^{-n}$.

6. BONUS : ne sera pas à l'interrogation. Manipuler un grand $\mathcal{O}$.

- 6.1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2 + 12n - 1$ et $v_n = -2n^2 + 4$.
Déterminer si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.
- 6.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5(-1)^n + \cos(5n^3)$ et $v_n = 1$.
Déterminer si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$ (on pourra admettre que u_n ne s'annule pas).
- 6.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{-1}{n^2} + \frac{2}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n^3}$.
Déterminer si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.
- 6.4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1)$.
Déterminer si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.
- 6.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}$ et $v_n = u_n^2$.
Déterminer si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.