

## Interrogation 22 d'entraînement

### Dimension

#### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Énoncer le théorème de la base extraite.
- 1.2 Énoncer le théorème de la base incomplète.
- 1.3 Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
- 1.4 Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
- 1.5 Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
- 1.6 Énoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.
- 1.7 Préciser la dimension d'une commode.

#### Révisions

- 1.8 Donner la définition de deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?
- 1.9 Définir la convergence d'une suite complexe (définition IV.1).
- 1.10 Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  soit croissante et comment le démontre-t-on ?
- 1.11 Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- 1.12 Donner la définition d'une suite extraite. Quand est-ce qu'une suite extraite converge-t-elle ?

#### 2. Déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

- 2.1 Déterminer la dimension de  $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{array} \right\}$ .
- 2.2 Déterminer la dimension de  $E = \text{Vect}((3, 0, 1), (2, -1, -1), (1, 1, 2))$ .
- 2.3 Déterminer la dimension de  $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$ .
- 2.4 Déterminer la dimension de  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$ .
- 2.5 Déterminer la dimension de  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille  $3 \times 3$ .

#### 3. Compléter une famille libre en une base.

- 3.1 Déterminer un supplémentaire de  $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x - 2y + 3z - 3t = 0 \\ -x + y + z - t = 0 \end{array} \right\}$ .
- 3.2 Justifier que  $\mathcal{L} = (1 + 2X + 3X^2 + 4X^3, 1 - X + X^2 + X^3)$  est libre et la compléter en une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
- 3.3 Déterminer un supplémentaire de  $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} 2a + 4b + 4c - 3d = 0 \\ a - b - c - d = 0 \\ 5b + 5c - 8d = 0 \end{array} \right\}$ .
- 3.4 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on pose  $\varepsilon_k = \sum_{i=1}^k i e_i$ .  
Montrer que  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est une base de  $E$ .
- 3.5 Déterminer un supplémentaire de  $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x + 2z - 2t = 0 \\ x + 2y + 3z - 5t = 0 \end{array} \right\}$ .

#### 4. Calcul du rang.

- 4.1 Soit  $\mathcal{F} = (3 + X + X^2, 5 - 2X^2, 3X + X^2, 1 - X + X^2)$ . Calculer le rang de  $\mathcal{F}$ .
- 4.2 Soit  $\mathcal{F} = ((1, 0, -2), (4, 2, 1), (-1, 3, 1), (0, 3, 3))$ . Calculer le rang de  $\mathcal{F}$ .
- 4.3 Soient  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\deg(P) = 2$  et  $\mathcal{F} = (P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)})$ . Calculer le rang de  $\mathcal{F}$ .
- 4.4 Calculer le rang de  $\mathcal{F} = ((2)_{n \in \mathbb{N}}, (n!)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}}, (5 + 2n)_{n \in \mathbb{N}})$ .
- 4.5 Soient  $\varepsilon > 0$  un réel strictement positif et  $E = \mathcal{F}([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R})$ . On considère dans  $E$  la famille  $\mathcal{F} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \cos(x), x \mapsto x^2 \cos(x))$ . Montrer que  $\mathcal{F}$  est libre et en déduire son rang.  
*Indication : un tout petit DL...*

**5. Montrer la supplémentarité à l'aide de la dimension.**

- 5.1 Démontrer à l'aide de la dimension que les sous-espaces vectoriels  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$  et  $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0\}$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- 5.2 Démontrer à l'aide de la dimension que  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((0, 0, -1))$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 5.3 Démontrer à l'aide de la dimension que  $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$  et  $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 5.4 Démontrer que  $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 4, 0), (1, -2, 1))$  et  $G = \text{Vect}((1, 0, 0))$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 5.5 Démontrer à l'aide de la dimension que  $F = \mathbb{R}_3[X]$  et  $G = \text{Vect}(X^5, X + X^4)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_5[X]$ .
- 5.6 A l'aide du théorème de la division euclidienne, montrer que  $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(3) = P'(3) = P''(3) = 0\}$  et  $G = \mathbb{R}_2[X]$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_5[X]$ .