Interrogation 25 d'entrainement
Applications linéaires II

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Que dire de l'image d'une famille par une application linéaire ? (Prop II.5)
   1.2 Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base. (Prop II.6)
   1.3 Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée suivant la nature de l'application linéaire.
   1.4 Définir le rang.
   1.5 Enoncer le théorème du rang.
   1.6 Caractériser les isomorphismes en dimension finie.
   1.7 Pourquoi le narcissisme entraîne l'égoïsme ? (Vous avez $4h$.)

   Révisions

   1.8 Définir et caractériser une famille libre.
   1.9 Définir et caractériser une famille liée.
   1.10 Définir une famille génératrice.
   1.11 Définir et caractériser une base.
   1.12 Enoncer le théorème de la base adaptée.

2. **Appliquer le théorème du rang.**
   2.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de Tr.
   2.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{2n}[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^k \end{array}$. On admet que f est bien définie et linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f.
   2.3 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{c} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{array}$. On admet que f est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f.
   2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension du noyau de f ?
   2.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$. On définit dans $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. On admet que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F. On pose enfin

$$\varphi : \begin{array}{c} F \to F \\ f \mapsto f'' - 7f' + 10f. \end{array}$$

   On admet que φ est bien définie et est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de φ.

3. **Appliquer la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.**

3.1 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.

3.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix} \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.

3.3 Dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$. On admet que $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ forme une base de E. On définit également $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$. On admet que φ est bien définie. Montrer que φ est un automorphisme.

3.4 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (a, b) & \mapsto & a + bj \end{array}$, où on rappelle que $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

3.5 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \left(P(1), P'(1), P''(1), \ldots, P^{(n)}(1)\right) \end{array}$. On admet que f est bien définie et linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

4. **Manipulation théorique des applications linéaires.**

4.1 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

4.2 Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

4.3 Soient E un espace vectoriel et u un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

4.4 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

4.5 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g(\mathrm{Ker}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

5. **En vrac (et un peu plus dur)**

5.1 Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$, que $p = 3\mathrm{Id}_E - f$ et $q = f - 2\mathrm{Id}_E$ sont des projecteurs et que leurs noyaux sont en somme directe.

5.2 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$. Que dire de f^4 ? Montrer que pour tout $u \in E \setminus \{0_E\}$, $(u, f(u))$ est libre.

5.3 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

5.4 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$.

5.5 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer que $g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f)$.