

Correction de l'interrogation 25 d'entraînement Applications linéaires II

1. Restituer le cours.

1.1 Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors

- Si f est injective et \mathcal{F} libre alors $f(\mathcal{F}) = (f(u_1), \dots, f(u_n))$ est libre.
- Si f est surjective et \mathcal{F} est génératrice dans E alors $f(\mathcal{F})$ est génératrice dans F .
- Si f est un isomorphisme et \mathcal{F} une base de E alors $f(\mathcal{F})$ est une base de F .

1.2 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .
- f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F .
- f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

1.3 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si f est injective alors $\dim(E) \leq \dim(F)$.
- Si f est surjective alors $\dim(E) \geq \dim(F)$.
- Si f est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$.

1.4 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors le rang de f est défini par

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

1.5 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors,

$$\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E).$$

1.6 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si deux des points suivants sont vrais

- $\dim(E) = \dim(F)$
- f est injective
- f est surjective

Alors f est un isomorphisme.

1.7 Plus un individu a une haute image de lui-même moins il a de coeur (à prononcer avec l'accent du nord), et ce indépendamment de son rang social.

2. Appliquer le théorème du rang.

2.1 On sait que la trace est linéaire et donc $\text{Im}(\text{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} . Donc

$$0 \leq \dim(\text{Im}(\text{Tr})) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1.$$

Ainsi $\text{rg}(\text{Tr}) = 0$ ou 1 . Or $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$ et donc la trace n'est pas identiquement nulle et son rang est donc non nul. Par conséquent $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = 1$. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, par le théorème du rang, on en déduit que

$$\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \text{rg}(\text{Tr}) = n^2 - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{rg}(\text{Tr}) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = n^2 - 1.}$$

2.2 *Méthode 1.* Calculons $\text{Im}(f)$. Puisque $(1, X, X^2, \dots, X^{2n})$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$, on a

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^{2n})) \\ &= \text{Vect}(1, 0, X, 0, X^2, \dots, 0, X^n) \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n) \\ &= \mathbb{R}_n[X]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1.$$

Puis, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) - \dim(\text{Im}(f)) = 2n + 1 - (n + 1) = n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = n + 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f)) = n.}$$

Méthode 2. Calculons $\text{Ker}(f)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n} a_{2k} X^k$. On a

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_{2k} X^k = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_{2k} = 0_{\mathbb{R}} \quad \text{par unicité des coefficients des polynômes} \\ &\Leftrightarrow P = a_1 X + a_3 X^3 + \dots + a_{2n-1} X^{2n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X, X^3, \dots, X^{2n-1}).$$

Posons $\mathcal{B} = (X, X^3, \dots, X^{2n-1})$. La famille \mathcal{B} est échelonnée en ses coordonnées donc est libre. Par ce qui précède \mathcal{B} engendre $\text{Ker}(f)$. Donc \mathcal{B} est une base de $\text{Ker}(f)$. Donc

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card}(\mathcal{B}) = n.$$

Puis, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, par le théorème du rang,

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) - \dim(\text{Ker}(f)) = 2n + 1 - n = n + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = n + 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f)) = n.}$$

2.3 *Méthode 1 : par le noyau.* Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(M) = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c-b=0 \\ d-a=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les matrices n'étant pas colinéaires, \mathcal{B} est libre. Or \mathcal{B} engendre $\text{Ker}(f)$ donc est une base de $\text{Ker}(f)$. Donc $\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2$. Puis, comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) = 2.}$$

Méthode 2 : par l'image. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} f(M) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

NB : Cela revient aussi à calculer les images de la base canonique.

On observe que $C_4 = -C_1$ et $C_2 = -C_3$. On peut donc enlever C_4 et C_2 :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Les matrices n'étant pas colinéaires, \mathcal{B} est libre. Or \mathcal{B} engendre $\text{Im}(f)$ donc est une base de $\text{Im}(f)$. Donc $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2$. Puis, comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) = 2.}$$

2.4 Puisque f est linéaire, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} . Donc

$$0 \leq \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1.$$

Par conséquent, on a deux cas :

- $\text{rg}(f) = 0$ et la fonction f est nulle. Dans ce cas $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$ et donc $\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n}$.
- $\text{rg}(f) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Or $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ et f est surjective. Par le théorème du rang, comme \mathbb{R}^n est de dimension finie, on en déduit que $\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{rg}(f) = n - 1}$. On dit que $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de \mathbb{R}^n .

2.5 Puisque pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (qui est un espace vectoriel) on en déduit bien que $F \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in F$ en particulier $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a alors

$$f \in \text{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est solution de l'équation (E) } \quad f'' - 7f' + 10f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $(E_c) : r^2 - 7r + 10$ l'équation caractéristique associée d'inconnu $r \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant associé à (E_c) .

$$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0.$$

Donc les solutions de (E_c) sont $\frac{7-3}{2} = 2$ et $\frac{7+3}{2} = 5$. Donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto Ae^{2t} + Be^{5t} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{2t} \end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{5t} \end{array} \right) = \text{Vect}(e_2, e_5).$$

Attention a priori on résout (E) dans l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} et rien ne nous indique au départ que ces éléments seront tous dans le noyau de φ . Ici puisque $e_2 \in F$ et $e_5 \in F$, on en déduit que \mathcal{S} est bien un sous-espace vectoriel de F et donc toutes les solutions de (E) sont dans le noyau. Conclusion :

$$\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{S} = \text{Vect}(e_2, e_5).$$

Or e_2 et e_5 ne sont pas colinéaires et donc forment une base de $\text{Ker}(\varphi)$. On en déduit que

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2.$$

Or (e_1, \dots, e_n) est une base de F (admis) et donc $\dim(F) = \text{Card}(e_1, \dots, e_n) = n$. Ainsi, F est de dimension finie et par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(F) - \text{rg}(\varphi) = n - 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\text{Im}(\varphi)) = n - 2 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2.}$$

NB : il est possible de déterminer l'image de φ . En effet, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\varphi(e_k) = k^2 e_k - 7k e_k + 10e_k = (k^2 - 7k + 10) e_k.$$

Or (e_1, \dots, e_n) est une base de F . Donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(4e_1, \dots, (n^2 - 7n + 10)e_n).$$

Or si $k = 2$ ou 5 , $k^2 - 7k + 10 = 0$. Donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(4e_1, -2e_3, -2e_4, 4e_6, \dots, (n^2 - 7n + 10)e_n).$$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{2, 5\}$, $k^2 - 7k + 10 \neq 0$ donc par les opérations $C_k \leftarrow C_k / (k^2 - 7k + 10)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{2, 5\}$, ce qui ne modifie pas l'espace engendré, on obtient

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, \dots, e_{n-1}, e_n).$$

La famille obtenue est une sous-famille de (e_1, \dots, e_n) est donc libre et forme une base de $\text{Im}(f)$. On retrouve bien que $\text{rg}(f) = n - 2$.

3. Appliquer la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

3.1 *Méthode 1.* Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 u \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow Au = 0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &&&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &&&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\
 &&&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
 &&&\Leftrightarrow x = y = z = 0 \\
 &&&\Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^3}.
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et f est injective. Or f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui est de dimension finie égale à 3. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Méthode 2. Puisque $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^3 , on a

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc,

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f) &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{2}C_3 \end{array} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow -(C_1 - C_2 - C_3)
 \end{aligned}$$

On reconnaît la base canonique de \mathbb{R}^3 . Ainsi,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^3.$$

Donc f est surjective. Or f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui est de dimension finie égale à 3. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

3.2 *Méthode 1.* Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 u \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \dots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0 \\ x_2 + 2x_3 + \dots + (n-1)x_n = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n = 0 \\ x_n = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le système obtenu est échelonné en ligne avec un pivot à chaque ligne et donc en remontant le système on obtient nécessairement $x_n = 0, x_{n-1} = 0, x_{n-2} = 0, \dots, x_1 = 0$. Donc $0_{\mathbb{R}^n}$ est l'unique solution. Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Donc f est injective. Or f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n qui est de dimension finie n . Donc les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on conclut que f est bijective :

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

Méthode 2. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \dots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}} \right)
 \end{aligned}$$

Montrons que \mathcal{B} est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0_n \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \dots + (n-1)\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases}.$$

En remontant ce système échelonné, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$. Donc la famille \mathcal{B} est libre. Or $\text{Card}(\mathcal{B}) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n et donc génératrice de \mathbb{R}^n . Ainsi,

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^n.$$

Donc f est surjective. Or f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n qui est de dimension finie n . Donc les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on conclut que f est bijective :

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

3.3 *Méthode 1.* Puisque $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ est une base de E , on en déduit que

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(\cos), \varphi(\sin), \varphi(\text{ch}), \varphi(\text{sh})) = \text{Vect}(-\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch}).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi) &= \text{Vect}(\cos, -\sin, \text{ch}, \text{sh},) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\ & && C_3 \leftrightarrow C_4 \\ &= \text{Vect}(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh},) && C_2 \leftarrow -C_2 \\ &= E. \end{aligned}$$

Donc φ est surjective (et on note au passage que f est bien un endomorphisme puisque $\text{Im}(f) \subseteq E$). Or φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie ($\dim(E) = 4$ car $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ en est une base). Conclusion, par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E, \varphi \in \text{GL}(E).}$$

Méthode 2. Soit $f \in E$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f = a \cos + b \sin + c \text{ch} + d \text{sh}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(f) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \varphi(a \cos + b \sin + c \text{ch} + d \text{sh}) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow a \varphi(\cos) + b \varphi(\sin) + c \varphi(\text{ch}) + d \varphi(\text{sh}) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} && \text{par linéarité de } \varphi \\ &\Leftrightarrow -a \sin + b \cos + c \text{sh} + d \text{ch} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow b \cos + (-a) \sin + d \text{ch} + c \text{sh} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Or $\mathcal{B} = (\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ est libre. Donc

$$f \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow b = -a = d = c = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow f = 0_E.$$

Ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et φ est injective. Or φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie ($\dim(E) = 4$ car $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ en est une base). Conclusion, par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E, \varphi \in \text{GL}(E).}$$

Bonus : la famille $\mathcal{B} = (\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ est bien libre. En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin + \lambda_3 \text{ch} + \lambda_4 \text{sh} = 0_E.$$

Alors, au voisinage de 0, on obtient :

$$\lambda_1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \lambda_2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \lambda_3 \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \lambda_4 \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0.$$

Autrement dit,

$$\lambda_1 + \lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_4)x + (\lambda_3 - \lambda_1)\frac{x^2}{2} + (\lambda_4 - \lambda_2)\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0.$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 - \lambda_2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_4 = 0 \end{cases} && \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + L_2 \end{aligned} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion, \mathcal{B} est libre.

3.4 *Méthode 1.* Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} (a, b) \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(a, b) = 0_{\mathbb{C}} && \Leftrightarrow a + bj = 0 \\ &&& \Leftrightarrow \underbrace{a - \frac{b}{2}}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}b}_{\in \mathbb{R}} = 0 \\ &&& \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \end{cases} \\ &&& \Leftrightarrow a = b = 0 && \Leftrightarrow (a, b) = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Donc f est injective. Or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Conclusion, par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

f est un isomorphisme.

Méthode 2. On sait que $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de \mathbb{R}^2 . Donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = \text{Vect}\underbrace{(1, j)}_{=\mathcal{B}_I}.$$

La famille \mathcal{B}_I est libre car 1 et j ne sont pas \mathbb{R} -colinéaires (mais sont \mathbb{C} -colinéaires!). De plus $\text{Card}(\mathcal{B}_I) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Donc \mathcal{B}_I est une base de \mathbb{C} . D'où

$$\text{Im}(f) = \mathbb{C}.$$

On pouvait aussi faire des opérations élémentaires. Donc f est surjective. Or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Conclusion, par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

f est un isomorphisme.

3.5 *Méthode 1.* Déterminons le noyau de f . Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}} &\Leftrightarrow (P(1), P'(1), P''(1), \dots, P^{(n)}(1)) = (0, 0, \dots, 0) \\ &&\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = \dots = P^{(n)}(1) = 0 \\ &&\Leftrightarrow 1 \text{ est une racine de multiplicité au moins } n+1 \text{ de } P. \end{aligned}$$

Or par hypothèse $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est de degré au plus n . Donc P possède plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré. Ainsi,

$$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ et par suite f est injective. Or $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en conclut que

L'application f est un isomorphisme.

4. Manipulation théorique des applications linéaires.

4.1 Soit $x \in \text{Im}(g \circ f)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = g \circ f(y) = g(f(y))$. Donc en posant $z = f(y)$, on a $x = g(z)$. Donc $x \in \text{Im}(g)$. Conclusion,

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g).$$

4.2 Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$. Alors $(u - \text{Id}_E)(x) = 0_E$ i.e. $u(x) - x = 0_E$ et donc $u(x) = x$. En composant par u , on obtient que $u^2(x) = u(x)$. Or $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc

$$0_E = u^2(x) = u(x).$$

Or on a vu que $u(x) = x$. Donc $x = u(x) = 0_E$. Ainsi $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque découlant du fait que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ soit un sous-espace vectoriel, on en conclut que

$$\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \{0_E\}.$$

4.3 Soit $x \in \text{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On compose par u pour obtenir alors que $u(x) = u^2(y)$. Or on sait par hypothèse que u est un projecteur i.e. $u^2 = u$. Donc

$$u(x) = u^2(y) = u(y).$$

Or par construction, $u(y) = x$ et donc $u(x) = u(y) = x$. Ainsi, $u(x) - x = 0_E$ et donc $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$. Conclusion,

$$\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u - \text{Id}_E).$$

4.4 Soit $x \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$. Puisque $x \in \text{Im}(f)$, on sait qu'il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Mais on sait également que $x \in \text{Ker}(g)$. Donc $0_E = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y)$. Par hypothèse, $g \circ f = \text{Id}_E$. Donc $0_E = y$ et par suite, $x = f(y) = f(0_E) = 0_E$. Donc $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque découlant du fait que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel (intersection de deux sous-espaces vectoriels), on conclut que

$$\boxed{\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}}.$$

4.5 Soit $x \in g(\text{Ker}(f))$. Donc il existe $y \in \text{Ker}(f)$ tel que $x = g(y)$. En composant par f , on obtient que

$$f(x) = f \circ g(y).$$

Or $f \circ g = g \circ f$, donc $f(x) = g \circ f(y)$. Mais puisque $y \in \text{Ker}(f)$, on a $f(y) = 0_E$ et donc $f(x) = g(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \text{Ker}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{g(\text{Ker}(f)) \subseteq \text{Ker}(f)}.$$

5. En vrac (et un peu plus dur)

5.1 Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors, on observe que

$$f^2 - 5f = -6\text{Id}_E \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6}f^2 + \frac{5}{6}f = \text{Id}_E.$$

Donc par linéarité de f ,

$$f \circ \left(-\frac{1}{6}f + \frac{5}{6}\text{Id}_E \right) = \text{Id}_E = \left(-\frac{1}{6}f + \frac{5}{6}\text{Id}_E \right) \circ f.$$

Donc $\boxed{f \text{ est inversible et donc un automorphisme de } E}$ et $f^{-1} = -\frac{1}{6}f + \frac{5}{6}\text{Id}_E$.

On calcule :

$$p^2 = (3\text{Id}_E - f) \circ (3\text{Id}_E - f) = 9\text{Id}_E - 6f + f^2 \quad \text{car } f \text{ et } \text{Id}_E \text{ commutent.}$$

Or par définition, $f^2 = 5f - 6\text{Id}_E$. Donc

$$p^2 = 9\text{Id}_E - 6f + 5f - 6\text{Id}_E = 3\text{Id}_E - f = p.$$

De plus, $p \in \mathcal{L}(E)$ en tant que somme d'endomorphisme. Donc $\boxed{p \text{ est un projecteur.}}$

De même,

$$q^2 = (f - 2\text{Id}_E)^2 = f^2 - 4f + 4\text{Id}_E = 5f - 6\text{Id}_E - 4f + 4\text{Id}_E = f - 2\text{Id}_E = q.$$

Or $q \in \mathcal{L}(E)$ en tant que somme d'endomorphisme. Donc $\boxed{q \text{ est un projecteur.}}$

Enfin, soit $x \in \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$. Alors $x \in \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E)$ et donc

$$0_E = (f - 3\text{Id}_E)(x) = f(x) - 3x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 3x.$$

De même, $x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et donc

$$0_E = (f - 2\text{Id}_E)(x) = f(x) - 2x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 2x.$$

Ainsi, $3x = f(x) = 2x \Leftrightarrow x = 0_E$. Donc $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \subseteq \{0_E\}$. Or on a également $\{0_E\} \subseteq \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ (en tant que sous-espace vectoriel). Conclusion, $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \{0_E\}$:

$$\boxed{\text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \text{ et } \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \text{ sont en somme directe.}}$$

5.2 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$. Alors, on a

$$f \circ (-f) = (-f) \circ f = \text{Id}_E.$$

Donc $\boxed{f \text{ est un automorphisme}}$ et $f^{-1} = -f$. De plus, on a $f^4 = (-\text{Id}_E)^2 = \text{Id}_E$ et $f^4 \in \mathcal{L}(E)$. Donc

$$\boxed{f^4 \text{ est une symétrie}}.$$

Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. Posons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda u + \mu f(u) = 0_E. \quad (1)$$

Alors en composant par f , on a également

$$\lambda f(u) + \mu f^2(u) = f(0_E) = 0_E \quad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

Or $f^2 = -\text{Id}_E$ donc

$$-\mu u + \lambda f(u) = 0_E. \quad (2)$$

En faisant $\lambda(1) - \mu(2)$, on trouve

$$(\lambda^2 + \mu^2) u = 0_E$$

Or $u \neq 0_E$, donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0_{\mathbb{R}}$. Or λ^2 et μ^2 sont deux réels positifs donc $\lambda = \mu = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall u \in E \setminus \{0_E\}, \quad (u, f(u)) \text{ est libre.}}$$

5.3 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Soit $x \in f(\text{Ker}(g \circ f))$. Alors il existe $y \in \text{Ker}(g \circ f)$ tel que $x = f(y)$. En particulier

$$x \in \text{Im}(f).$$

De plus $y \in \text{Ker}(g \circ f)$ donc $g \circ f(y) = 0_E$. Or $x = f(y)$ donc

$$0_E = g(f(y)) = g(x) \quad \text{i.e.} \quad x \in \text{Ker}(g).$$

Ainsi $x \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$. On a donc montré que

$$f(\text{Ker}(g \circ f)) \subseteq \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f).$$

Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$. Alors d'une part $g(x) = 0_E$ et d'autre part, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Ainsi

$$0_E = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y).$$

Donc $y \in \text{Ker}(g \circ f)$ et comme $x = f(y)$, on a bien

$$x \in f(\text{Ker}(g \circ f)).$$

On a donc montré également que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) \subseteq f(\text{Ker}(g \circ f))$. Conclusion,

$$\boxed{f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f).}$$

5.4 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n. \gg$$

Démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, alors on a $f^0 = \text{Id}_E$ et donc

$$f^n \circ g - g \circ f^n = \text{Id}_E \circ g - g \circ \text{Id}_E = g - g = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathbb{K}} \times \text{Id}_E = 0 \times f^0.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n.$$

En composant par f , qui est linéaire, on a

$$f \circ (f^n \circ g - g \circ f^n) = f \circ (n f^n) \quad \Leftrightarrow \quad f^{n+1} \circ g - f \circ g \circ f^n = n f^{n+1}.$$

Attention f et g ne commutent pas a priori. Cependant par hypothèse on sait que $f \circ g - g \circ f = f$ donc $f \circ g = f + g \circ f$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g - (f + g \circ f) \circ f^n &= n f^{n+1} & \Leftrightarrow & \quad f^{n+1} \circ g - f^{n+1} + g \circ f^{n+1} = n f^{n+1} \\ & & \Leftrightarrow & \quad f^{n+1} \circ g + g \circ f^{n+1} = (n+1) f^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n.}$$

5.5 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Attention ! On ne dit absolument pas que g est inversible, dans $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f))$ on désigne l'image réciproque de $\text{Im}(g \circ f)$.

Soit $x \in g^{-1}(\text{Im}(g \circ f))$ i.e. $g(x) \in \text{Im}(g \circ f)$. Donc il existe $y \in E$ tel que

$$g(x) = g \circ f(y) = g(f(y)).$$

Merci à l'aimable auditoire de ne pas simplifier abusivement, on n'a jamais dit que g était injective. Posons $x_1 = f(y)$ et $x_2 = x - f(y)$. Alors

- $x_1 = f(y) \in \text{Im}(f)$.
- $g(x_2) = g(x) - g(f(y))$ car g est linéaire. Donc par ce qui précède, $g(x_2) = 0_E$ i.e. $x_2 \in \text{Ker}(g)$.
- $x_1 + x_2 = x - f(y) + f(y) = x$.

On en déduit donc que $x \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in g^{-1}(\text{Im}(g \circ f))$, on en déduit que

$$g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Ker}(g).$$

Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$. Alors il existe $x_1 \in \text{Im}(f)$ et $x_2 \in \text{Ker}(g)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Puisque $x_1 \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x_1 = f(y)$ et donc $x_2 = x - x_1 = x - f(y)$. Or $x_2 \in \text{Ker}(g)$. Donc

$$0_E = g(x_2) = g(x - f(y)) = g(x) - g(f(y)) \quad \text{car } g \text{ est linéaire.}$$

Donc $g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y)$. Ainsi $g(x) \in \text{Im}(g \circ f)$ et donc $x \in g^{-1}(\text{Im}(g \circ f))$. On a donc aussi montré que $\text{Im}(f) + \text{Ker}(g) \subseteq g^{-1}(\text{Im}(g \circ f))$. Conclusion,

$$\boxed{g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = \text{Im}(f) + \text{Ker}(g).}$$