

Interrogation 27 d'entraînement

Intégration

1. Restituer le cours.

- 1.1 Énoncer le théorème de Weierstrass.
- 1.2 Énoncer la propriété de séparation de l'intégrale.
- 1.3 Énoncer l'inégalité triangulaire.
- 1.4 Énoncer l'inégalité de la moyenne.
- 1.5 Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- 1.6 Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- 1.7 Pourquoi appelle-t-on un trois demis, un trois demis et un cinq demis, un cinq demis ?

Révisions

- 1.8 Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général ? Donner un contre-exemple à la réciproque.
- 1.9 Énoncer le théorème sur les séries de Riemann.
- 1.10 Énoncer le théorème de comparaison.
- 1.11 Énoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
- 1.12 Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?

2. Encadrer une intégrale.

- 2.1 Soit $a > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^a \frac{e^{-t^n} \cos(\sqrt{t}) \ln(t)}{1 + 2t^n} dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \frac{\text{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t} dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
- 2.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_n^{n^2} e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} t^5 dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
- 2.4 Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}([0; a])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^a \arctan(e^{nt} + 2) (e^{-nt} + 3) f(t) dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\text{ch}(t)}{t} dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

3. Sommes de Riemann.

- 3.1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.
- 3.2 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$.
- 3.3 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.
- 3.4 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$.
- 3.5 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

4. Théorème fondamental de l'analyse.

4.1 Justifier que $\varphi : x \mapsto \int_0^1 e^{tx} \arccos(tx) dt$ est dérivable sur $[-1; 0[\cup]0; 1]$ et donner une expression de sa dérivée.

Bonus : montrer que φ est définie mais pas continue 0.

4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}([0; 1])$. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_0^1 (1+tx)^n f(t) dt$ et donner une expression de $\varphi'(0)$.

4.3 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_{x+1}^{e^x} \sqrt{\text{sh}(t)} dt$ et donner une expression de sa dérivée.

4.4 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \ln \left(\int_0^{3x} \text{ch}(t) \arcsin(t) dt \right)$ et donner une expression de sa dérivée.

4.5 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_2^3 (tx)^{tx} dt$ et donner une expression de sa dérivée en fonction de φ .

5. Inégalité de Taylor-Lagrange

5.1 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto e^{2t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{e^{2x}(2x)^{n+1}}{(n+1)!}$.

5.2 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

5.3 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction $f : t \mapsto \tan(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{8x^3}{3}$.

5.4 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in [0; +\infty[$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par x^{n+1} .

5.5 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \text{ch}(t)$ aux points $0 < a < b$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\text{sh}(b) \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.