Interrogation 28 d'entrainement
Représentation matricielle

1. **Restituer le cours.**
   - 1.1 Préciser l'isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices. Quelle est la dimension de $\mathscr{L}(E, F)$?
   - 1.2 Enoncer la proposition donnant le vecteur image.
   - 1.3 Donner la matrice d'une composition.
   - 1.4 Enoncer la caractérisation des bases par la représentation matricielle.
   - 1.5 Enoncer la proposition donnant la représentation d'un vecteur dans une nouvelle base.
   - 1.6 Caractériser l'inversibilité d'une matrice.
   - 1.7 Il ne faut pas confondre ma rage de pastis avec...

   Révisions

   - 1.8 Enoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.
   - 1.9 Caractériser les bijections sur les ensembles finis.
   - 1.10 Enoncer la formule de Poincaré. Cas de l'union disjointe ?
   - 1.11 A quel type de tirage correspond à p-uplet ? Un arrangement ? une combinaison ?
   - 1.12 Donner le nombre d'applications de E dans F. Combien sont injectives ? bijectives ?
   - 1.13 Donner la notation pour l'ensemble des parties d'un ensemble. Lorsque E est fini en donner son cardinal.

2. **Matrice d'une application linéaire.**
   - 2.1 On admet que $\mathscr{B} = (t \mapsto \operatorname{ch}(t), t \mapsto \operatorname{sh}(t), t \mapsto 3)$ forme une base de $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$. On pose $\varphi : E \to E$, $f \mapsto f' - f(0)$. On admet que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.
   - 2.2 On pose $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $M \mapsto M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
   - 2.3 On pose $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
   - 2.4 On pose $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto (\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x), \operatorname{Re}(y), \operatorname{Im}(y))$ où $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
     Même question lorsque $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   - 2.5 Déterminer la matrice de $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^T$ dans la base canonique.
   - 2.6 On pose $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$, $(a, b, c, d) \mapsto (2a + b) X^2 + (a - 3b + c) X - 4c$ et $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(2)$. Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques.

3. **Matrice de passage.**
   - 3.1 Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $e_1 = (3, 1)$, $e_2 = (5, 2)$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ (dans ce sens).
   - 3.2 Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathscr{C} = (e_x, e_y)$ la base canonique et on pose $e_r = \cos(\theta)\, e_x + \sin(\theta)\, e_y$ et $e_\theta = -\sin(\theta)\, e_x + \cos(\theta)\, e_y$. On fixe $\theta = \frac{\pi}{4}$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_r, e_\theta)$ est une base et calculer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
   - 3.3 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\mathscr{B} = \left(1, X - 1, (X - 1)^2\right)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
   - 3.4 Dans $\mathbb{R}_1[X]$, on pose $\mathscr{B}_1 = (X + 1, X + 2)$ et $\mathscr{B}_2 = (2X + 1, 3X + 1)$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.
   - 3.5 Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ une base de E. On pose $\mathscr{B}_1 = \left(\frac{e_1 + e_2}{2}, \frac{e_1 - e_2}{2}\right)$ ainsi que $\mathscr{B}_2 = (2e_1 - e_2, e_1 + 3e_2)$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases de E et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

4. **Formule de changement de base.**

4.1 Soient $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_4$ quatre bases et f une application linéaire. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f)$ sachant que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{B}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_4}(\mathscr{B}_2) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2 On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x-y+3z, 2y+z)$. On pose $\mathscr{B}_3 = ((1,0,0), (-1,1,0), (1,-3,2))$, $\mathscr{B}_2 = ((-1,1), (5,-2))$, $\mathscr{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On donne $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{C}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f)$.

4.3 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et f un endomorphisme. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sachant que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4 On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé, $e_1 = (0,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,0,-1)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et en déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

4.5 Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. On pose $e_1 = (1,1,0,0)$, $e_2 = (0,0,1,1)$, $e_3 = (0,1,0,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ et en déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

4.6 Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. On pose $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (-2,0,0)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ et en déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

5. **Noyau, image, rang.**

5.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Calculer le noyau et le rang de f.

5.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à A. Déterminer le noyau et le rang de $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

5.3 Soient E un espace vectoriel, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -6 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et le rang de $f - 4\mathrm{Id}_E$.

5.4 Soient E un espace vectoriel, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'image et le rang de f.

5.5 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. Calculer l'image et le rang de f.

5.6 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ canoniquement associé. Calculer l'image et le rang de f.